



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

Е.П. ВАУЛИН

ФИЗИКА  
ИОНИЗОВАННЫХ  
ГАЗОВ

533 (078)  
В 218

МОСКВА - 1980

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

---

Е.П. ВАУЛИН

ФИЗИКА ИОНИЗОВАННЫХ ГАЗОВ

Конспект лекций



Утверждено  
на заседании редсовета  
как учебное пособие  
15 февраля 1979 г.

МОСКВА, 1980

УДК: 533.1:537.56(075.8)

© Московский авиационный институт, 1980 г.

533 (075)  
В 218

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На кафедре физики Московского авиационного института в течение ряда лет проводится научно-методическая работа по разработке и созданию учебных пособий по курсу физики в соответствии с новой программой для ряда инженерных специальностей, где требуется более глубокое знание как фактической стороны, так и методов современной физики по сравнению с традиционными курсами общей физики для технических вузов.

Основная задача при создании подобного рода учебных пособий по курсу общей физики для инженерных вузов - максимально отразить новейшие достижения, теоретический уровень и методы современной физики при сохранении разумной простоты и наглядности материала.

Предлагаемый конспект лекций по разделу курса "Физика ионизованных газов" представляет собой учебное пособие, являющееся дополнением к разделам курса общей физики "Элементы статистической физики" и "Молекулярно-кинетическая теория газов". Поэтому объем материала, который может быть включен в пособие по курсу общей физики, должен быть минимальным, а теоретические основы и методы анализа — соответствовать курсу общей физики.

В пособии рассмотрены специфические свойства ионизованного газа и его отличие от неионизованных газов. В качестве таких специфических свойств ионизованных газов прежде всего рассматриваются характерные пространственно-временные масштабы ионизованных газов — радиус Дебая и частота плазменных электростатических колебаний, электропроводность ионизованных газов как один из процессов переноса, электропроводность ионизованного газа при наличии скрещенных электрического и магнитного полей.

Особое внимание в пособии уделено процессам упругих и неупругих столкновений. Это позволило дать основные понятия теории скоростей процессов. В Приложении рассмотрены физические принципы МГД-преобразователей энергии.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

(только в сканированном издании)

$\alpha$	степень ионизации
$\varepsilon_0$	электрическая постоянная, $\frac{1}{4\pi c_0^2} \cdot 10^7$ Ф/м
$c_0$	скорость света, $3 \cdot 10^8$ м/с
$e$	заряд электрона, $1.6 \cdot 10^{-(23)19}$ Кл
$E$ ( $\vec{E}$ )	напряжённость электростатического поля, В/м
$g$	статистический вес энергетического состояния частицы
$l$	средняя длина свободного пробега, м
$n$	концентрация: $n_i$ – ионов, $n_e$ – электронов, $n_a$ – атомов (нейтральных частиц)
$Q$	эффективное сечение столкновения, м <sup>2</sup>
$u$	скорость частицы, м/с
$v$	скорость частицы, м/с
$z$	кратность заряда иона
$\rho$	объёмная плотность, 1/м <sup>3</sup>
$\nu$	частота столкновений, 1/с
$\chi$	относительная концентрация или объёмная доля: $\chi_i$ – ионов, $\chi_e$ – электронов, $\chi_a$ – атомов
$\tau_q$	среднее время передачи импульса, с

# Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ИОНИЗОВАННЫХ ГАЗОВ.

## ПОНЯТИЕ ПЛАЗМЕННОГО СОСТОЯНИЯ

### § 1.1. Основные термодинамические свойства и параметры ионизованных газов

Ионизованный газ представляет собой макроскопическую систему, состоящую в общем случае из нейтральных, положительно и отрицательно заряженных частиц. Нейтральными частицами могут быть как невозбуждённые, так и возбуждённые атомы и молекулы. Заряженными частицами являются положительно или отрицательно заряженные ионы, а также свободные электроны<sup>1)</sup>. Таким образом, ионизованный газ представляет смесь нейтральных атомов или молекул с концентрацией  $n_a$ , а также положительно и отрицательно заряженных частиц с концентрациями  $n_i^+$  и  $n_e$ . Будем в дальнейшем для определенности рассматривать простейший случай ионизованного газа - смесь атомов с их ионами и свободными электронами.

В таком случае суммарная концентрация частиц ионизованного газа равна  $n = n_a + n_i^+ + n_e$ .

Так как в состав ионизованного газа входят заряженные частицы, то в отличие от обычных газов ионизованный газ может характеризоваться определённой плотностью объёмного заряда  $\rho$ . В общем случае  $z$ -кратной ионизации атомов<sup>2)</sup> плотность положительного

заряда равна  $e \sum_{m=1}^z m n_i^{(m)}$ , а электронов -  $e n_e$ . Тогда объёмная плотность заряда

$$\rho = e \sum_{m=1}^z m n_i^{(m)} - e n_e. \quad (1.1)$$

Это означает, что в ионизованном газе должно существовать электрическое поле кулоновского характера, напряжённость которого определяется уравнением

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (1.2)$$

При каждом акте ионизации атома или атомного остатка появление частицы с положительным элементарным зарядом всегда сопровождается возникновением электрона, и, казалось бы, должно иметь место строгое равенство

$$n_e = \sum_{m=1}^z m n_i^{(m)}, \quad (1.3)$$

---

<sup>1)</sup> Электроны, входящие в состав атома или молекулы и связанные с ними, называются связанными.

<sup>2)</sup> Кратность заряда иона  $z$  определяется числом электронов, удаленных из атома;  $n_i^{(z)}$  - концентрация ионов  $z$ -кратной ионизации.

выражающее так называемое условие квазинейтральности\* ионизованного газа. Однако это равенство не выполняется. Даже в термодинамически равновесном ионизованном газе оно нарушается. Причиной нарушения равенства (1.3) в термодинамически равновесном ионизованном газе являются флуктуации плотности заряженных частиц.

Нейтральные и заряженные частицы ионизованного газа находятся в непрерывном движении и взаимодействии друг с другом, носящим характер столкновений. Это приводит к хаотизации всех микроскопических параметров газа, например скоростей и кинетической энергии, электрических и магнитных моментов атомов и др. В такой статистической системе термодинамические параметры отождествляются со средними значениями соответствующих микроскопических параметров.

В силу статистических свойств ионизованного газа имеют место флуктуации термодинамических параметров – случайные отклонения от среднего. В частности, концентрации заряженных частиц в ионизованном газе  $n_e$  и  $n_i^+$  также претерпевают флуктуации. Это приводит к нарушению условия квазинейтральности (1.3), естественно, в определённой области пространства и за определённое время. В термодинамически равновесной системе эти нарушения самопроизвольно (за счёт теплового движения частиц) затухают и вновь за счёт флуктуаций возникают.

Существует особое состояние ионизованного газа, называемое плазменным состоянием вещества (или просто плазмой). Оно характеризуется тем, что в среднем в достаточно больших объёмах по сравнению с характерной областью нарушения условия квазинейтральности и за достаточно большие промежутки времени по сравнению с характерным временем возникновения флуктуаций объёмного заряда удовлетворяется условие квазинейтральности. Таким образом, плазменное состояние ионизованного газа характеризуется условием квазинейтральности

$$\rho \approx 0 \quad (1.4)$$

или

$$n_e \approx \sum_{m=1}^z m n_i^{(m)}. \quad (1.5)$$

В частном случае однократной ионизации условие квазинейтральности плазмы (1.5) примет вид  $n_e \approx n_i^{+1}$ .

Квазинейтральность, таким образом, есть макроскопическое свойство плазмы. Плазма -

---

\* Электрическая нейтральность газа означает отсутствие свободных зарядов; квазинейтральность – при наличии свободных зарядов – отсутствие объёмного заряда.

<sup>1)</sup> В этом частном случае индекс кратности иона будем опускать:  $n_i^{(1)} = n_i^+$ .

это ионизованный газ, в котором отрицательный заряд электронов почти точно нейтрализует положительный заряд ионов. Условие квазинейтральности нарушается за счет различного рода внешних воздействий - силового поля, неоднородности термодинамических параметров, взаимодействия с телами и т.п.

Важным термодинамическим параметром ионизованного газа является степень ионизации  $\alpha$ . Степенью ионизации называется доля ионов по отношению к суммарному числу атомов и ионов:

$$\alpha = \frac{n_i^+}{n_a + n_i^+} \quad ^1) \quad (1.6)$$

Кроме этого параметра, в термодинамике ионизованных газов используются относительные концентрации. Так, относительные концентрации электронов и ионов в общем случае по определению равны

$$\chi_i^{(K)} = \frac{n_i^{(K)}}{n_a + n_e + \sum_{m=1}^z n_i^{(m)}}, \quad \chi_e = \frac{n_e}{n_a + n_e + \sum_{m=1}^z n_i^{(m)}}, \quad (1.7)$$

или с учетом условия квазинейтральности (1.5)

$$\chi_i^{(K)} = \frac{n_i^{(K)}}{n_a + \sum_{m=1}^z (m+1)n_i^{(m)}}, \quad \chi_e = \frac{\sum_{m=1}^z m n_i^{(m)}}{n_a + n_e + \sum_{m=1}^z (m+1)n_i^{(m)}}, \quad (1.8)$$

В частном случае однократной ионизации из (1.8) будем иметь

$$\chi_i = \frac{n_e}{n_a + 2n_e}, \quad \chi_e = \frac{n_e}{n_a + 2n_e} \quad ^2). \quad (1.9)$$

Так как выражение  $n_a + \sum_{m=1}^z (m+1)n_i^{(m)}$  дает суммарную концентрацию частиц, то, принимая во внимание соотношения (1.8), можно найти

$$\chi_e + \sum_{m=1}^z \chi_i^{(m)} + \chi_a = 1 \quad ^3). \quad (1.10)$$

Свойства ионизованного газа существенно зависят от степени ионизации  $\alpha$ . С точки

<sup>1)</sup> Для неионизованного газа  $n_i^+ = 0$  степень ионизации  $\alpha = 0$ ; для полностью ионизованного газа  $n_a = 0$  степень ионизации  $\alpha = 1$ .

<sup>2)</sup> Для неионизованного газа  $n_e = 0$  объёмные доли электронов и ионов равны нулю  $\chi_e = \chi_i = 0$ ; для полностью ионизованного газа  $n_a = 0$  объёмные доли электронов и ионов равны одной второй  $\chi_e = \chi_i = 1/2$ .

<sup>3)</sup>  $\chi_a = \frac{n_a}{\left( n_a + \sum_{m=1}^z (m+1)n_i^{(m)} \right)}$



зрения масштабов относительных концентраций частиц в ионизованном газе различают частично и сильно ионизованную плазму. Если электроны соударяются с нейтральными атомами чаще, чем с положительно заряженными ионами, то такой газ называется слабо ионизованным или частично ионизованной плазмой. Обычно в этом случае  $n_e, n_i \ll n_a$  и степень ионизации мала  $\alpha \ll 1$ .

С другой стороны, если преобладают электрон-ионные взаимодействия, то газ считается сильно ионизованным и имеет свойства полностью ионизованной плазмы. В этом случае  $n_a \ll n_e, n_i$ , и степень ионизации велика  $\alpha \approx 1$ . Степень ионизации, различающая эти случаи, зависит от температуры и в несколько меньшей степени от плотности газа. При заданной степени ионизации электрон-ионные взаимодействия относительно более важны при низких температурах, чем при высоких.

Обычно газ, в котором степень ионизации больше чем  $10^{-2}$ , можно считать сильно ионизованным в указанном выше смысле при условии, что температура будет порядка  $10^3$ – $10^4$  К. Причина этого заключается в том, что кулоновские взаимодействия являются дальнodelствующими, и поэтому электрон может «чувствовать» немногие удаленные от него ионы сильнее, чем сравнительно многочисленные и близкие к нему нейтральные атомы.

По отношению к масштабам абсолютных значений концентраций заряженных частиц ионизованный газ подразделяется на идеальную и плотную плазму.

В дальнейшем при рассмотрении свойств плазмы ограничимся приближением идеального газа. В этом приближении кулоновское взаимодействие между заряженными частицами следует считать малым по сравнению с тепловой энергией:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\bar{r}} \ll kT, \quad (1.11)$$

где  $\bar{r}$  - среднее расстояние между ионами. Последнее связано с числом электронов в единице объема  $n_e$  соотношением

$$\bar{r} \approx n_e^{-1/3}, \quad (1.12)$$

так что условие идеальности газовой плазмы можно представить в виде

$$n_e \ll \frac{(4\pi\epsilon_0 kT)^3}{e^6}. \quad (1.13)$$

Если неравенство (1.13) выполнено, то плазму приближенно можно рассматривать как обычный газ, характеризующийся в случае термодинамического равновесия температурой  $T$ .

Частицы плазмы будут обладать максвелловским распределением по скоростям и равномерным распределением в пространстве. Если неравенство (1.13) не выполняется, плазма называется плотной.

Например, в области так называемой низкотемпературной плазмы\*, встречающейся во многих технических устройствах, температура плазмы по порядку величины может достигать  $10^4$ - $10^5$  К. В таком случае согласно неравенству (1.13) ионизованный газ в этих устройствах можно считать идеальным, если концентрация электронов удовлетворяет неравенству  $n_e \ll 2,1(10^{26} - 10^{29})\text{м}^{-3}$ .

## § 1.2. Пространственный и временной масштабы в плазме. Радиус Дебая. Частота плазменных колебаний

Как отмечалось, квазинейтральная плазма - это ионизованный газ, электрически нейтральный в среднем, в достаточно больших объёмах и за достаточно большие промежутки времени. Линейный масштаб, вне пределов которого проявляется квазинейтральность, носит название радиуса экранирования Дебая  $l_D$ . Существует временной масштаб, в течение которого может существенно нарушиться условие нейтральности  $T_p$ .

Установим физическую причину нарушения квазинейтральности равновесной плазмы, а также пространственные и временные масштабы этого явления. Как указывалось, хаотическое движение частиц плазмы приводит к флуктуациям их плотности.

Флуктуация плотности заряженных частиц, например, электронов, немедленно приводит к появлению избыточного отрицательного заряда, а следовательно, и равного ему по величине положительного заряда ионов.

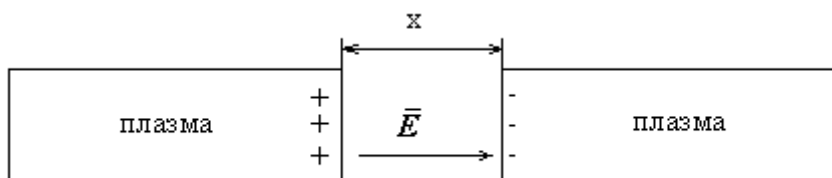


Рис. 1.1. Схема локального нарушения условия квазинейтральности

Таким образом, нарушается квазинейтральность плазмы. Пространственный масштаб разделения зарядов при этом может быть установлен из следующих соображений. Представим себе, что в некоторой области плазмы, для простоты выбранной в виде плоского слоя, все частицы одного знака, например, электроны, сместились на одну из ограничивающих этот слой плоскостей (рис. 1.1). В результате возникает электрическое поле, напряженность которого может быть найдена по известному из электростатики соотношению  $E = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma$ , где  $\Sigma$  - поверх-

---

\* Деление на низкотемпературную и высокотемпературную плазму - чисто условное. Обычно к высокотемпературной относят плазму, в которой могут протекать реакции ядерного синтеза (термоядерные реакции).

ностная плотность зарядов, равная в данном случае  $\Sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} = en_e x$ . Это позволяет найти напряжённость электрического поля:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} en_e x. \quad (1.14)$$

Увеличение потенциальной энергии электронов  $\Delta U$ , прошедших расстояние  $x$  в направлении этого поля, равно  $\Delta U = \int_0^x eEdx = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2 n_e x^2}{2}$ . Если других сил, действующих на электрон, нет, то он может изменить свою потенциальную энергию только за счёт уменьшения кинетической энергии. Положив по порядку величины это изменение потенциальной энергии в данном направлении энергии, приходящейся на одну степень свободы  $\frac{e^2 n_e x_{\max}^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} kT$ , и определив радиус Дебая как  $x_{\max} = l_D$ , где

$$l_D = \left( \frac{\varepsilon_0 kT}{e^2 n_e} \right)^{1/2}, \quad (1.15)$$

видим, что максимальная величина смещения электронов за счёт флуктуации плотности равна некоторому характерному параметру, определяемому по формуле (1.15) и называемому радиусом Дебая. Итак, дебаевский радиус представляет собой масштаб пространственного разделения зарядов в ионизованном газе, которое может достигаться при тепловом движении частиц.

Подставив в (1.15) численные значения констант, найдем следующее удобное для расчетов радиуса Дебая соотношение:

$$l_D = 69,0 \left( \frac{T}{n} \right)^{1/2} \text{ м.}$$

В этом соотношении параметры  $n$  и  $T$  выражены в единицах СИ. Приведём оценки радиуса Дебая для некоторых экспериментальных и технических устройств. Так, при типичных параметрах магнетогидродинамического генератора энергии<sup>1)</sup>  $T = 2500$  °К и  $n_e = 10^{20} \text{ м}^{-3}$   $l_D = 3,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; в газовых разрядах низкого давления<sup>2)</sup>  $T \cong 10^4$  °К и  $n_e = 10^{15} - 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ,  $l_D = 2,2 \cdot 10^{-4} - 6,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ ; в термоядерных реакторах<sup>3)</sup>  $T_e \approx 4 \cdot 10^7$  °К и  $n_e \cong 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ,  $l_D \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

Установим временной масштаб нарушения квазинейтральности. Электрическое поле,

---

1) МГД-генератор - плазменный преобразователь тепловой энергии в электрическую.

2) Газовый разряд-явление протекания электрического тока в ионизованных газах [5].

3) Термоядерный реактор - плазменное устройство для разогрева плазмы до температур, при которых происходят термоядерные реакции[1].

возникающее при разделении зарядов, стремится вернуть электроны в их равновесные состояния (в силу сравнительно большой массы ионы, по существу, остаются на месте). На каждый электрон действует сила  $F = -eE = -\frac{1}{\varepsilon_0} e^2 n_e x$ . По второму закону Ньютона имеем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} x.$$

Это - уравнение гармонических колебаний, круговая частота которых определяется соотношением

$$\omega_p = \left( \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Как видим, в термодинамически равновесном ионизованном газе возникают характеристические колебания концентрации электронов, частота которых называется плазменной и определяется формулой (1.16). Иногда частота этих колебаний и сами колебания называют лэнгмюровскими (по имени учёного И. Лэнгмюра, впервые давшего их теорию).

Период этих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ , так как время возвращения электронов от положения максимального смещения к равновесному положению составляет четверть периода, квазинейтральность восстанавливается за время, порядка обратной величины:

$$T \approx \omega^{-1}. \quad (1.17)$$

Эту величину следует рассматривать как характеристический масштаб времени для равновесного ионизованного газа. Подчеркнем, что наличие плазменных колебаний в термодинамически равновесном ионизованном газе - одна из отличительных особенностей этого состояния вещества. Подставляя в (1.17) численные значения констант, найдем в единицах СИ:  $T_p \approx 1,8 \cdot 10^{-3} n_e^{-1/2}$ . Для большинства видов ионизованного газа, получаемого в земных условиях, это очень малая величина. Так, для упомянутых выше параметров в некоторых плазменных устройствах имеем в МГД-генераторах -  $1,8 \cdot 10^{-13}$  с, в газовых разрядах низкого давления -  $5,7 \cdot 10^{-11} \dots 1,8 \cdot 10^{-14}$  с и в термоядерных реакторах -  $1,8 \cdot 10^{-13}$  с.

Представление о параметрах ионизованных газов и соответствующих величинах радиуса Дебая и плазменной частоты для различных плазменных объектов и естественных источников ионизованных газов можно получить из рис. 1.2. На диаграмме представлены значения радиуса Дебая  $l_D$  и плазменной частоты  $\nu_p = \omega_p / 2\pi$  для широкого интервала значений концентраций и температур электронов. В виде прямоугольников нанесены области, соответствующие различным плазменным объектам естественного и искусственного происхождения. Вне пре-

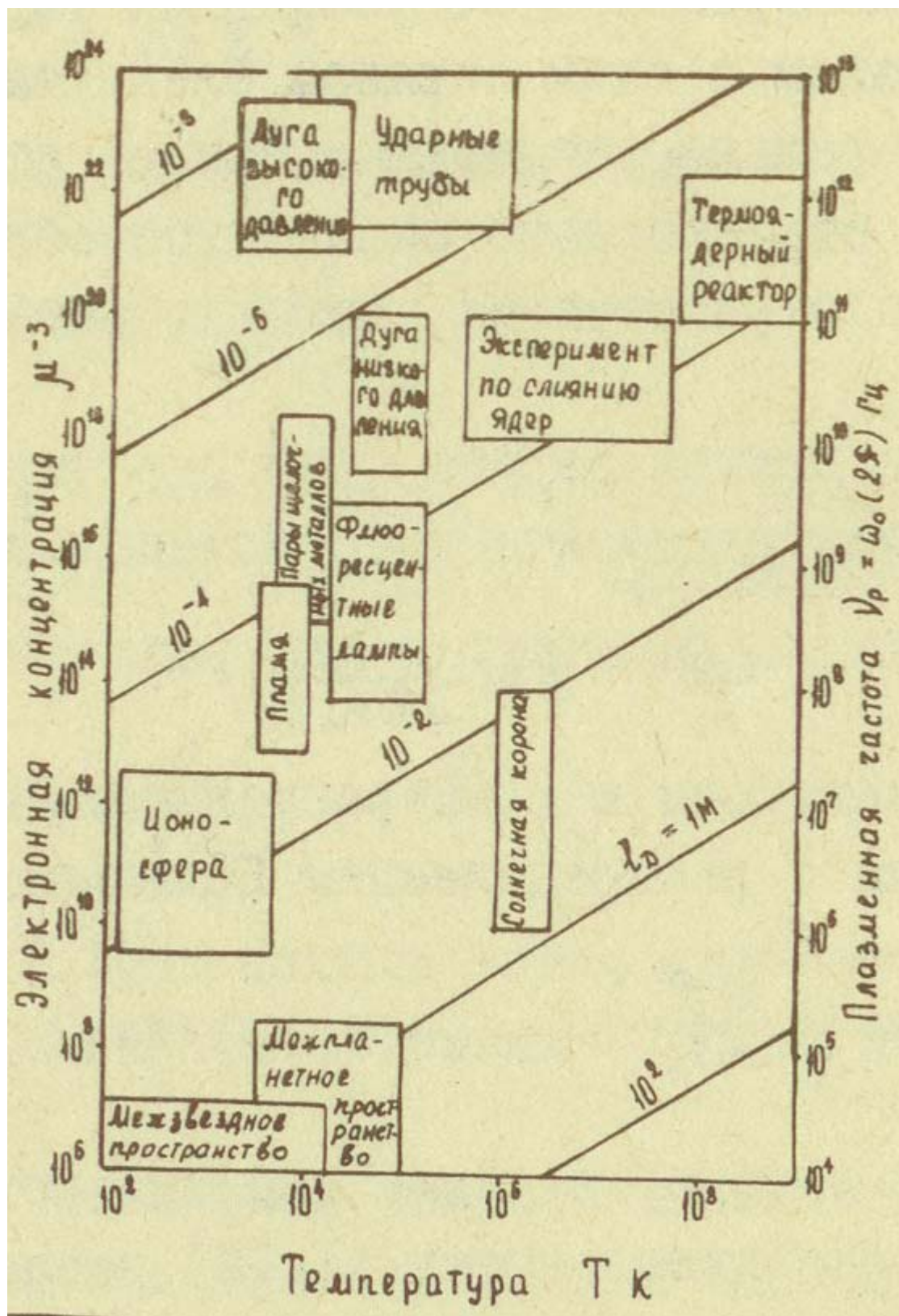


Рис. 1.2. Параметры ионизованных газов и соответствующие величины радиуса Дебая и плазменной частоты для различных источников ионизованного газа

делов диаграммы остались объекты, в которых плазма находится в сверхплотном состоянии ( $n_e \geq 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ). Такая плазма по физическим свойствам приближается к свойствам совокупностей

заряженных частиц в твёрдых телах при низких температурах и состоянию звёздного вещества при высоких температурах. Таким образом, плазменное состояние вещества - наиболее распространённое в природе.

### § 1.3. Дебаевское экранирование заряженной частицы в идеальной плазме

Предположим, что положительный точечный заряд  $q$  помещён в идеальный квазинейтральный ионизованный газ - разреженную плазму. Расположенные рядом с этим зарядом электроны будут притягиваться к нему, а положительно заряженные ионы - отталкиваться. Вокруг заряда образуется отрицательно заряженное облако, которое будет, начиная с некоторого расстояния, экранировать плазму от действия этого заряда.

Для области вблизи заряда, там, где экранирование сравнительно невелико, для электростатического потенциала вокруг заряда примем

$$\varphi \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Соседние электроны и ионы располагаются в поле этого потенциала в соответствии с распределением Больцмана для числа частиц:

$$n_i^+ = n \cdot \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad n_e = n \cdot \exp\left(+\frac{e\varphi}{kT}\right),$$

где  $n$  - средняя плотность числа частиц, когда нет заряда  $q$ .

В силу условия идеальности (1.13) экспоненты можно разложить в ряды:

$$n_i^+ \approx n\left(1 - \frac{e\varphi}{kT}\right), \quad n_e \approx n\left(1 + \frac{e\varphi}{kT}\right).$$

Это позволяет найти приближенное значение средней плотности объёмного заряда облака в виде

$$\rho = e(n_i^+ - n_e) = -2e^2 n \frac{\varphi}{kT} = -\frac{2e^2 n q}{4\pi\epsilon_0 r kT}. \quad (1.18)$$

Пусть  $R$  - расстояние, на котором полный отрицательный заряд облака, окружающий заряд  $q$ , равен  $-q$ , т.е. расстояние, на котором экранирование будет полным. Значение  $R$  находится из условия

$$-q = \int_0^R \rho dV. \quad (1.19)$$

Так как распределение заряда симметрично, то  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Тогда с учетом (1.18) после интегрирования условие (1.19) может быть представлено в виде  $R = l_D$ . Отсюда следует, что

дебаевский радиус есть расстояние, необходимое для экранирования заряда, помещенного в плазму.

Этот вывод позволяет найти полную потенциальную энергию заряда  $q$  в поле экранирующего его облака. По определению потенциальной энергии системы зарядов имеем

$$U \cong \int_0^R \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (1.20)$$

С учётом введённых ранее выражений для  $\rho$  и  $dV$  после интегрирования найдем

$$U \cong \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 l_D}. \quad (1.21)$$

Приведённый здесь вывод нельзя считать строгим, так как  $\varphi$  не является в точности  $q/4\pi\epsilon_0 r$ , когда  $r$  приближается к  $l_D$ . Более аккуратное рассмотрение даёт для потенциала выражение

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{l_D}\right),$$

где  $l_D$  определяется (1.15). Отсюда видно, что экранирование по существу будет полным уже на расстояниях порядка нескольких дебаевских радиусов.

Важно отметить, что в силу условия идеальности плазмы (1.3) величина потенциальной энергии заряженных частиц в плазме значительно меньше её тепловой энергии:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_D kT} \ll 1. \quad (1.22)$$

Кроме того, среднее расстояние между частицами плазмы в этом случае много меньше радиуса Дебая ( $r \ll l_D$ ). Это позволяет в подавляющем большинстве случаев (см. рис. 1.2) пренебречь потенциальной энергией кулоновского взаимодействия заряженных частиц и считать плазму по своим статистическим и термодинамическим свойствам подобной идеальному газу.

Определим также количество заряженных частиц, участвующих в экранировании поля частицы плазмы. По порядку величины это количество равно числу заряженных частиц в сфере, радиус которой равен радиусу Дебая (такая сфера называется дебаевской). С точностью до численного множителя эта величина равна

$$N_D \approx l_D^3 n_e \approx (\epsilon_0 k)^{3/2} \left( \frac{T^3}{e^6 n_e} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (1.23)$$

Для идеальной плазмы, как видим, число частиц в дебаевской сфере велико.

В связи с вышеизложенным поясним смысл и соотношение некоторых понятий физики ионизованного газа. Существуют следующие непротиворечивые понятия: термодинамически

равновесный ионизованный газ  $\equiv$  квазинейтральный ионизованный газ  $\equiv$  термодинамически равновесная плазма  $\equiv$  плазма. Понятие «ионизованный газ» шире понятия «плазма». Действительно, в соответствующих условиях ионизованный газ может быть плазмой, неравновесным ионизованным газом, т.е. системой заряженных и нейтральных частиц, подвергающихся какому-либо внешнему воздействию произвольной интенсивности, и так называемой недебаевской плазмой, когда в дебаевской сфере число частиц мало. В практике существуют такие неравновесные состояния, когда о квазинейтральности не может быть и речи, хотя в системе имеются как положительно, так и отрицательно заряженные частицы. В качестве примера таких ситуаций можно назвать состояния в области фронта сильной ударной волны, фронта ионизации, в пристеночных и особенно в приэлектродных областях газовых разрядов и т.п. Поэтому при рассмотрении общих физических свойств макроскопических систем, включающих заряженные частицы, ее рациональнее называть ионизованным газом, а там, где условия близки к термодинамически равновесным, плазмой.



## Глава 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОГО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

### § 2.1. Статистический метод определения параметров ионизованного газа

Термодинамически равновесный ионизованный газ представляет собой смесь нейтральных и заряженных частиц, температуры которых всюду одинаковы и равны между собой:

$$T_a = T_i = T_e = T. \quad (2.1)$$

В такой статистической системе распределение частиц по скоростям определяется соответствующими функциями распределения плотности вероятности Максвелла для каждого К-го компонента ионизованного газа:

$$f_{0K}(u_K) = 4\pi \left( \frac{a_K}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-a_K u_K^2) u_K^2, \quad (2.2)$$

где параметр распределения  $a_K$  зависит от массы частиц и их температуры и определяется известным соотношением

$$a_K = \frac{m_K}{2kT}. \quad (2.3)$$

Из кинетической теории известно, что физические свойства статистической системы (в данном случае ионизованного газа) полностью определяются заданием функции распределения по скоростям для каждого его компонента.

Действительно, поскольку вероятность того, что абсолютная величина скорости частицы находится в интервале от  $u$  до  $u+du$ , равна

$$dW = f(u)du, \quad (2.4)$$

а число частиц данного сорта в единице объёма  $\delta n$ , абсолютные величины скорости которых лежат в том же интервале,

$$\delta n = n f(u) du. \quad (2.5)$$

Можно найти макроскопическое значение какой-нибудь физической величины  $A(u)$ , характеризующей определённое микроскопическое свойство частиц на основании статистического метода описания свойств вещества.

Этот метод основан на расчете статистического среднего.

---

\* Здесь и далее индексом К обозначен компонент смеси; для ионизованного газа в простейшем случае он принимает значения:  $e$  - электроны;  $i$  - ионы;  $a$  - атомы.

Значение статистического среднего микроскопического свойства  $A(u)$ , отнесенного к одной частице, определяется формулой

$$\bar{A} = \int_0^{\infty} A(u) f(u) du, \quad (2.6)$$

а макроскопическое значение того же микроскопического свойства, отнесённого к какому-то макроскопическому объёму, например, к единице объёма,

$$n\bar{A} = \int_0^{\infty} A(u) \delta n, \quad (2.7)$$

где  $\delta n$  определено в (2.5).

Так как концентрация частиц  $n$  имеет смысл среднего значения\*, то (2.7) можно представить в виде

$$n\bar{A} = \int_0^{\infty} A(u) \delta n,$$

Естественно, функция распределения в зависимости от поставленной задачи может быть выражена или через компоненты скорости или  $u_x, u_y, u_z$ , энергию  $E$  согласно определениям

$$dW = f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z, \quad dW = f(E) dE. \quad (2.8)$$

Для простейшей модели ионизованного газа необходимо ввести как минимум три типа частиц - электроны, положительные ионы и нейтральные атомы. Микроскопические свойства этих частиц различны:

$m_e, m_i, m_a$  - массы электрона, иона и атома;

$q_e = -e, q_i = ze, q_a = 0$  - электрические заряды частиц;

$\vec{u}_e, \vec{u}_i, \vec{u}_a$  - скорости в лабораторной системе координат;

$m_e \vec{u}_e, m_i \vec{u}_i, m_a \vec{u}_a$  - импульсы;

$\frac{m_e \vec{u}_e^2}{2}, \frac{m_i \vec{u}_i^2}{2}, \frac{m_a \vec{u}_a^2}{2}$  - кинетические энергии частиц.

Могут быть также определены другие микроскопические величины, например в кинетической теории важны потоки указанных величин.

Поток какой-либо микроскопической величины  $A(u_x, u_y, u_z)$  в произвольном направлении  $x$  может быть определен из следующих соображений. Выделим мысленно в газе произвольную поверхность  $S$ , нормаль к которой совпадает с выбранным направлением  $x$  (рис. 2.1). Найдем:

\* Действительно, полагая в (2.7)  $A(u)=1$ , будем иметь  $\bar{n} = \int_0^{\infty} \delta n = \int_0^{\infty} n f(u) du$ . Так как  $n$  не зависит от скорости, но может зависеть от координат, то  $\bar{n} = n$  в силу условия нормировки функции распределения  $\int_0^{\infty} n f(u) du = 1$ .

число частиц, проходящих за время  $dt$  через элемент поверхности  $dS$ , компоненты скорости которых лежат в интервалах

от  $u_x$  до  $u_x+du_x$ ,

от  $u_y$  до  $u_y+du_y$ ,

от  $u_z$  до  $u_z+du_z$ .

Для этого построим цилиндр с площадью основания  $dS$  и длиной образующей  $u_x dt$ . Объём

этого цилиндра  $dV_x = u_x dt dS$ . Очевидно, все частицы, попавшие в этот элемент объёма  $dV$ , скорости которых лежат в указанных выше интервалах

(обозначим их число  $\delta N_x$ ), пройдут через поверхность  $dS$  за время  $dt$  в направлении  $x$ .

Число этих частиц, очевидно, равно

$$dN_x = dn \cdot dV_x \quad (2.9)$$

и определяет поток частиц  $\delta \dot{N}_x$ , компоненты скорости которых лежат в заданных интервалах:

$$\delta \dot{N}_x = \delta N_x / dt.$$

Так как каждая частица обладает свойством  $A$ , поток  $\delta G_x$  этой микроскопической величины, переносимой группой частиц  $\delta n$  в направлении  $x$ , будет определяться соотношением

$$\delta G_x(A) = A(u_x, u_y, u_z) \delta n \cdot dV_x \frac{1}{dt} \quad (2.10)$$

или с учётом значения  $dV_x$ , и выражения для  $\delta n$

$$\delta G_x(A) = n u_x A(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z dS. \quad (2.11)$$

Удобно рассматривать плотность потока величины  $A$ , которая может быть определена следующим образом:

$$\frac{\delta G_x}{dS} = \delta \Gamma_x(A) n u_x A(u_x, u_y, u_z) f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z. \quad (2.12)$$

Усредняя выражение (2.12) во всем интервале изменения компонентов скоростей, найдем макроскопическое соотношение для плотности потока микроскопической величины  $A(u_x, u_y, u_z)$ :

$$\Gamma_x^+(A) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n u_x A(u_x, u_y, u_z) f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z. \quad (2.14)$$

Полагая в (2.6)  $A$  равным 1,  $m$ ,  $q$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $u$ ,  $u^2$ ,  $\frac{mu^2}{2}$ , найдём соответствующие макроскопические величины: концентрацию  $n$ , плотность  $\rho$ , плотность электрического заряда

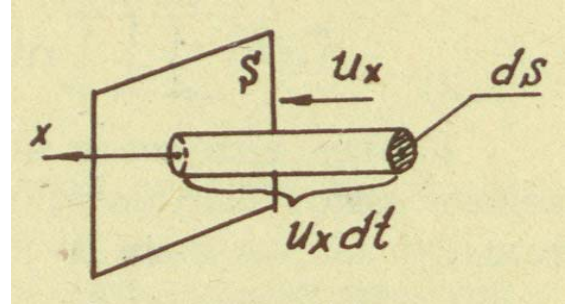


Рис. 2.1. К расчёту потока микроскопической величины  $A(u_x, u_y, u_z)$ , переносимой группой частиц  $\delta n$  в направлении  $x$ .

$\rho_q$ , средние значения компонентов скорости  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ , среднюю скорость  $\bar{u}$ , среднюю квадратичную скорость  $\sqrt{\bar{u}^2}$ , среднюю кинетическую энергию  $\frac{m\bar{u}^2}{2}$ .

Соответственно на основании (2.13) или (2.14) можно вычислить для  $A$ , равного 1,  $m$ ,  $q$ ,  $mu_x$ ,  $mu_y$ ,  $mu_z$ ,  $\frac{mu^2}{2}$ , такие макроскопические величины, как средние плотности потока частиц  $\Gamma_x(1)$ , массы  $\Gamma_x(m)$ , заряда  $\Gamma_x(q)$ , импульса  $\Gamma_x(mu_x)$ , кинетической энергии  $\Gamma_x\left(\frac{mu^2}{2}\right)$ .

Естественно, в силу условия термодинамического равновесия, когда статистически все направления в газе равновероятны, средние значения компонентов скорости  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$  и средние потоки частиц, массы, заряда и кинетической энергии равны нулю. Эти величины в равновесных условиях не равны нулю лишь для одностороннего движения (формула (2.14)). Они не равны нулю также в неравновесных условиях, когда распределение Максвелла нарушается.

## § 2.2. Характерные скорости частиц в ионизованном газе (при максвелловском распределении)

Рассмотрим характерные скорости максвелловского распределения для компонент ионизованного газа: наивероятнейшую  $u_{\text{кн}}$ , среднюю скорость  $\bar{u}_k$ , среднюю квадратичную скорость  $\sqrt{\bar{u}^2}$ , а также среднюю относительную скорость частиц с различной массой  $m_k, m_l$  -  $v_{kl}$ .

Расчёт первых трёх указанных скоростей приводит к следующим выражениям:  
наивероятнейшая скорость

$$u_{\text{кн}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_k}}; \quad (2.15)$$

средняя скорость

$$\bar{u}_k = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_k}}; \quad (2.16)$$

средняя квадратичная скорость

$$\sqrt{\bar{u}_k^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_k}}. \quad (2.17)$$

Поясним постановку задачи расчёта средней относительной скорости двух частиц, а также проведём сам расчёт.

Заметим прежде всего, что в системе из двух сталкивающихся частиц с массами  $m_k$  и  $m_l$  непосредственное значение имеет лишь скорость относительного движения.

Относительная скорость двух молекул может быть представлена как

$$\vec{v}_{kl} = \vec{u}_k - \vec{u}_l. \quad (2.18)$$

Движение системы из двух частиц в целом относительно лабораторной системы координат может быть описано движением их центра масс со скоростью  $\vec{v}_0$ .

Скорость движения центра масс двух частиц может быть найдена из законов механики, а именно, из известного определения

$$M_{kl}\vec{v}_0 = m_k\vec{u}_k + m_l\vec{u}_l, \quad (2.19)$$

где  $M_{kl} = m_k + m_l$ .

Тогда

$$\vec{v}_0 = \frac{m_k\vec{u}_k + m_l\vec{u}_l}{M_{kl}}. \quad (M_{kl} = m_{kl}?)$$

Пользуясь формулами (2.18) и (2.19), скорости частиц можно представить соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k &= \vec{v}_0 + \frac{m_l}{M_{kl}} \vec{v}_{kl}; \\ \vec{u}_l &= \vec{v}_0 - \frac{m_k}{M_{kl}} \vec{v}_{kl}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Кинетическая энергия системы из двух молекул равна

$$E = \frac{m_k u_k^2}{2} + \frac{m_l u_l^2}{2}.$$

Подставляя сюда  $\vec{u}_k$  и  $\vec{u}_l$  из (2.20), находим

$$E = \frac{M_{kl} v_0^2}{2} + \frac{m_{kl} v_{kl}^2}{2}, \quad (2.21)$$

где

$$m_{kl} = \frac{m_k m_l}{m_k + m_l} \quad (2.22)$$

приведённая масса частиц.

Распределение по состояниям двух сталкивающихся частиц есть не что иное, как вероятность события, что одна частица имеет скорость вблизи  $\vec{u}_k$ , а другая – вблизи  $\vec{u}_l$ .

На основании теоремы об умножении вероятностей независимых случайных событий она может быть представлена как произведение вероятностей  $dW_k$  для одной частицы иметь скорость в интервале от  $\vec{u}_k$  до  $\vec{u}_k + d\vec{u}_k$  и  $dW_l$  для другой – иметь скорость в интервале от  $\vec{u}_l$  до

$\vec{u}_l + d\vec{u}_l$  (если по-русски, то частица  $k$  имеет скорость  $[\vec{u}_k; \vec{u}_k + d\vec{u}_k]$  с вероятностью  $dW_k$ , аналогично для частицы  $l$  – прим. авт. скана), то есть

$$dW_{kl} = dW_k dW_l, \quad (2.23)$$

где  $dW_k$  и  $dW_l$  определены в (2.8).

Независимые случайные состояния системы из двух частиц в равновесных условиях могут быть описаны соответствующими функциями распределения Максвелла (2.2) для двух статистически независимых движений – движения центра масс со скоростью  $\vec{v}_0$  и массой  $M_{kl}$  и относительного движения  $\vec{v}_{kl}$  частицы с приведённой массой  $m_{kl}$ .

Так что, та же вероятность рассматриваемого сложного события  $dW_{kl}$  может быть представлена как произведение вероятности  $dW_0$  для центра масс иметь скорость вблизи  $\vec{v}_0$  и вероятности  $dW_v$  ( $dW_v$ , надо полагать. – прим. авт. скана) для частицы с приведённой массой  $m_{kl}$  иметь относительную скорость вблизи  $\vec{v}_{kl}$ , то есть

$$dW_{kl} = dW_0 dW_v, \quad (2.24)^*$$

Здесь, по определению (2.4):

$$dW_0 = f_0(v_0) dv_0; \quad (2.25)$$

$$dW_v = f_v(v_{kl}) dv_{kl}, \quad (2.26)$$

где  $f_0(v_0)$  и  $f_v(v_{kl})$  – функции распределения модулей соответствующих скоростей.

Эти функции распределения для равновесных условий являются максвеловскими и записываются в виде

$$f_0(v_0) = 4\pi \left( \frac{a_{0kl}}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-a_{0kl} v_0^2) v_0^2, \quad (2.27)$$

где

$$a_{0kl} = \frac{M_{kl}}{2kT}, \quad (2.28)$$

$$f_v(v_{kl}) = 4\pi \left( \frac{a_{kl}}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-a_{kl} v_{kl}^2) v_{kl}^2, \quad (2.29)$$

$$a_{kl} = \frac{m_{kl}}{2kT}, \quad (2.30)$$

Полученное распределение по состояниям (2.24) удобно для расчёта величин, в которых фигурирует процесс столкновения или движения двух частиц.

---

\* Заметим, что выражение (2.24) может быть найдено также путём преобразования переменных  $(\vec{v}_k, \vec{v}_l) \rightarrow (\vec{v}_0, \vec{v}_{kl})$  в (2.23).

В частности, не представляет труда вычислить среднюю относительную скорость двух частиц  $\bar{v}_{kl}$ .

По определению среднего

$$\bar{v}_{kl} = \int_0^\infty \int_0^\infty v_{kl} dW_{kl}, \quad (2.31)$$

или

$$\bar{v}_{kl} = \int_0^\infty \int_0^\infty v_{kl} f_v(v_{kl}) f_0(v_0) dv_{kl} dv_0. \quad (2.32)$$

В силу условия нормировки функции  $f_0(v_0)$  и независимости  $v_{kl}$  от  $v_0$  окончательно найдём

$$\bar{v}_{kl} = \int_0^\infty v_{kl} f_v(v_{kl}) dv_{kl}, \quad (2.33)$$

то есть, выражение, подобное средней скорости частицы, но с приведённой массой  $m_{kl}$ .

Таким образом, средняя относительная скорость двух частиц с массами  $m_k$  и  $m_l$  определяется формулой

$$\bar{v}_{kl} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{kl}}}. \quad (2.34)$$

Проанализируем характерные скорости максвелловского распределения для ионизованного газа, состоящего из электронов, ионов и атомов.

Особенностью этой смеси является существенная разница массы электрона и масс ионов и атомов:

$$m_e \ll m_i, m_a, \quad (2.35)$$

а также практическое равенство массы атома и его иона

$$m_i \approx m_a. \quad (2.36)$$

Соотношения (2.35) и (2.36) позволяют заключить, что средняя скорость электронов в ионизованном газе значительно превышает эту величину для ионов и атомов. Причём отношение средней скорости иона или атомов к средней скорости электрона равно корню квадратному из отношения масс электрона и иона:

$$\frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_e} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1. \quad (2.37)$$

Средние же скорости тяжёлых частиц близки:  $\bar{u}_a \approx \bar{u}_i$ .

При рассмотрении средней скорости относительного движения частиц в ионизованном газе указанные соотношения между их массами позволяют сделать следующие важные выводы.

При движении двух тяжёлых частиц – атома относительно другого атома, атома относительно иона и иона относительно другого иона в силу (2.36) из (2.34) получим для средней относительной скорости этих частиц выражения:

$$\bar{v}_{aa} = \sqrt{2\bar{u}_a}, \quad \bar{v}_{ii} = \sqrt{2\bar{u}_i}, \quad \bar{v}_{ai} = \sqrt{2\bar{u}_a} = \sqrt{2\bar{u}_i}. \quad (2.38)$$

При движении электрона относительно тяжёлой частицы в силу (2.35) приведённая масса приблизительно равна массе электрона:

$$m_{ei} \cong m_{ea} = \frac{m_e m_a}{m_e + m_a} \approx m_e. \quad (2.39)$$

Следовательно, средняя относительная скорость электрона и тяжёлой частицы согласно (2.34) и (2.16) близка к средней скорости электронов:

$$\bar{v}_{ea} \approx \bar{v}_{ei} \approx \bar{u}_e. \quad (2.40)$$

### § 2.3. Средняя энергия частиц и давление ионизованного газа

Рассмотрим идеальный ионизованный газ. Электроны имеют лишь кинетическую энергию поступательного движения, а атомы и ионы, кроме кинетической энергии поступательного движения, обладают энергией связанных электронных состояний (энергия возбуждения и ионизации).

Для расчёта средней энергии поступательного движения частиц можно применить в рассматриваемых условиях идеального ионизованного газа классическую статистику. Энергия же связанных электронных состояний может быть определена лишь с привлечением квантовых представлений в физике.

Этот вопрос в рамках данного пособия не может быть решён полностью. Ниже мы приведём лишь качественные соображения по вопросу возбуждения внутренних степеней свободы частиц ионизованного газа.

По определению, средняя энергия поступательного движения частиц ионизованного газа равна

$$\bar{E}_k = \int_0^\infty \frac{m_k u^2}{2} f_k(u) du. \quad (2.41)$$

В случае термодинамически равновесного ионизованного газа будем иметь

$$\bar{E}_e = \bar{E}_i = \bar{E}_a = \frac{3}{2} kT, \quad (2.42)$$

то есть, средняя энергия поступательного движения частиц ионизованного газа одинакова, в то время как средние скорости могут существенно отличаться для частиц с разной массой (см. (2.37)).



Рассмотрим давление идеального ионизованного газа. Прежде покажем, что давление определяется плотностью потока импульса частиц в данном направлении  $x$ , то есть давление  $p$  равно потоку импульса  $\Gamma_x(mu_x)$ , который на основании (2.13) при  $A(u_x, u_y, u_z) = mu_x$  равен

$$\Gamma_x(mu_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} nmu_x^2 f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z. \quad (2.43)$$

Действительно, обращаясь к рис. 2.1, будем считать поверхность  $S$  мысленно выделенным в газе слоем частиц или стенкой.

Пусть столкновения частиц будут упругими. Это означает, что каждая частица при столкновении со стенкой изменяет нормальную составляющую своего импульса на обратное значение, так что изменение импульса падающей частицы равно  $-2mu_x$  (минус – прим. авт. скана). Очевидно, изменение импульса группы падающих частиц  $\delta n$ , скорости которых лежат в заданном интервале и которые столкнутся с элементом поверхности слоя  $ds$ , будет определяться выражением (2.11), где  $A(u_x, u_y, u_z) = -2mu_x$ . В этом случае величина  $dG_x(A)$  имеет смысл скорости изменения импульса группы частиц  $\delta n$ , отражённых от стенки за счёт упругих ударов.

Очевидно, равное по величине, но противоположное по знаку значение импульса приобретает элемент слоя  $ds$ .

Обозначив эту скорость изменения импульса элемента слоя  $ds$  через  $\delta\dot{P}_x$ , на основании (2.11) будем иметь

$$\delta\dot{P}_x = 2nmu_x^2 f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z ds. \quad (2.44)$$

Согласно закону Ньютона, скорость изменения импульса в данном направлении  $\delta\dot{P}_x$  равна действующей силе в том же направлении  $\delta F_x$ , то есть слой испытывает силовое воздействие  $\delta F_x$  за счёт ударов группы частиц  $\delta n$ , причём

$$\delta F_x = \delta\dot{P}_x. \quad (2.45)$$

Так как сила  $\delta F_x$  нормальна к элементу поверхности  $ds$ , то давление, обусловленное ударами группы частиц  $\delta n$ , определяется соотношением

$$\delta p = \frac{\delta F_x}{\delta s} = \frac{\delta\dot{P}_x}{ds}, \quad (2.46)$$

т.е.

$$\delta p = 2mnu_x^2 f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z. \quad (2.47)$$

Усредняя (2.47) по скоростям, найдём давление газа. По смыслу вывода  $\delta p$ , очевидно, что усреднение по компоненте  $u_x$  следует производить в интервале от 0 до  $\infty$ , т.е. согласно формуле (2.14).

В таком случае, давление газа определяется соотношением

$$p = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2mn u_x^2 f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z, \quad (2.48)$$

В силу чётности подынтегрального выражения соотношение (2.48) может быть представлено в виде

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} mn u_x^2 f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z, \quad (2.49)$$

или

$$p = mn \bar{u}_x^2 = \rho \bar{u}_x^2, \quad (2.50)$$

где  $\bar{u}_x^2 = \frac{1}{2a} \dots$

Сравнивая (2.49) с (2.43), видим, что давление в газе определяется средней плотностью потока импульса частиц. Так как направление потока было выбрано произвольным, то давление в газе изотропно.

Рассмотрим давление ионизованного газа. Каждая компонента характеризуется своим парциальным давлением. На основании (2.50) будем иметь

$$p_e = \frac{m_e n_e}{2a_e}, \quad p_i = \frac{m_i n_i}{2a_i}, \quad p_a = \frac{m_a n_a}{2a_a}. \quad (2.51)$$

где

$$a_e = \frac{m_e}{2kT}, \quad a_i = \frac{m_i}{2kT}, \quad a_a = \frac{m_a}{2kT}.$$

Таким образом, парциальные давления компонент идеального ионизованного газа определяются уравнениями

$$p_e = n_e kT, \quad p_i = n_i kT, \quad p_a = n_a kT. \quad (2.52)$$

Так как поток аддитивен, то давление ионизованного газа равно сумме парциальных давлений его компонент (2.52).

Это позволяет сформулировать уравнение состояния идеального термодинамически равновесного ионизованного газа в виде

$$p = nkT, \quad (2.53)$$

где давление ионизованного газа

$$p = p_e + p_i + p_a, \quad (2.54)$$

а концентрация

$$n = n_e + n_i + n_a. \quad (2.55)$$

Учитывая условие квазинейтральности (1.5), выражение (2.55) можно преобразовать к виду

$$n = n_a + \sum_{m=1}^z (m+1)n_i^{(m)}. \quad (2.56)$$

В частном случае однократно ионизованного газа

$$n = n_a + 2n_e, \quad n_e = n_i^{(1)}.$$

Для слабо ионизованного газа  $n_0 \ll n_a$ , так что давление газа практически определяется давлением нейтральных частиц  $p = n_a kT$  и для полностью ионизированной плазмы  $n_a = 0$ , например, при  $z = 1$

$$p = 2n_e kT.$$

В физике ионизованного газа широко используется понятие так называемого локального максвелловского распределения для ионизованного газа в целом, а также для отдельных его компонентов – электронов, ионов и атомов.

В этом случае предполагается, что в каждой точке вообще неравновесной системы устанавливается для каждой компоненты максвелловское распределение по скоростям, с собственной температурой компоненты, зависящей от координат и времени  $T_k = T_k(x, y, z, t)$  и концентрацией  $n_k = n_k(x, y, z, t)$ .

Локальное максвелловское распределение по скоростям будет иметь вид (2.3) с параметром распределения

$$a_k = \frac{m_k}{2kT_k(x, y, z, t)}. \quad (2.57)$$

Таким образом, в приближении локального максвелловского распределения можно говорить о различных температурах частиц ионизованного газа:  $T_e$  – о температуре электронов,  $T_i$  – ионов и  $T_a$  – атомов.

С учётом локального максвелловского распределения и условия квазинейтральности уравнение состояния идеального газа в силу (2.54), например, при  $z = 1$ , примет вид

$$p = n_e k(T_e + T_i) + n_a kT_a. \quad (2.58)$$

Возможность локального максвелловского распределения в ионизованном газе связана с наличием процесса релаксации, вследствие которого любое нарушение термодинамического равновесия благодаря столкновениям частиц в изолированной системе за характерное время релаксации  $\tau$  исчезает и первоначально неравновесное распределение стремится к максвелловскому. Таким образом, если термодинамическое равновесие (максвелловское распределение) внутри каждой из компонент плазмы устанавливается быстрее, чем между компонентами, можно пользоваться собственными температурами компонент. Если при этом плазма слабо неоднородна и в ней происходят достаточно медленные макроскопические процессы, то для компонент устанавливается распределение по скоростям, близкое к локально-максвелловскому.

## Глава 3. СТОЛКНОВЕНИЯ И СКОРОСТИ ПРОЦЕССОВ

### § 3.1. Эффективное сечение. Средняя частота столкновений и средняя длина свободного пробега

Изучая взаимодействие, рассеяние и реакции между частицами, мы сталкиваемся с понятием поперечного сечения. Поперечное сечение является количественной характеристикой вероятности процесса столкновения. Для реальных частиц, не имеющих жёстких границ, а имеющих поле сил взаимодействия, вводится так называемое эффективное сечение взаимодействия, которое определяется через вероятность того или иного процесса. Эффективные сечения одной и той же частицы для различных процессов могут быть различными.

Проще всего проиллюстрировать это понятие на примере твёрдых сферических молекул. Такие молекулы взаимодействуют друг с другом только в том случае, если они непосредственно соприкасаются своими поверхностями.

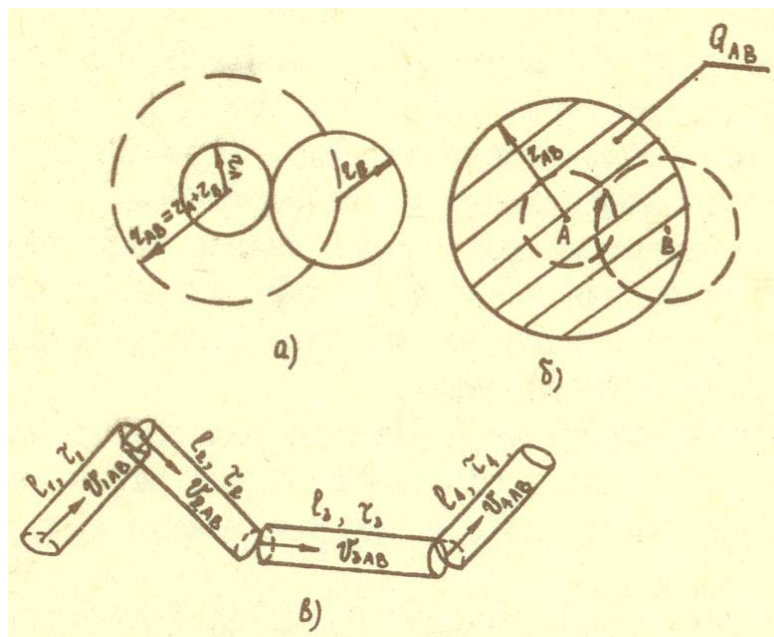


Рис. 3.1. Характер столкновений и движения частиц в газе:

- а) наибольшее расстояние, при котором частицы ещё взаимодействуют;  $r_{AB} = r_A + r_B$  – эффективный радиус взаимодействия;
- б) положение центров сталкивающихся частиц;  $Q_{AB}$  – площадь эффективного сечения столкновения  $A+B$ ;
- в) траектория движения частицы в газе;  $l_i$ ,  $\tau_i$ ,  $v_{iAB}$  ( $i=1...4$ ) – свободная длина, время и относительная скорость движения частиц соответственно

Тогда центры двух молекул не могут сблизиться на расстояние, меньшее суммы их радиусов –  $r_{AB} = r_A + r_B$  (рис. 3.1, а). Если считать, что молекулы движутся относительно друг

друга, то столкновение может произойти всякий раз, когда центр движущейся молекулы  $A$  при своём движении пересечёт площадку  $\pi(r_A+r_B)^2$  вокруг другой молекулы  $B$  (рис. 3.1, б).

$$l_{ABi} = v_{ABi} \cdot \tau_{ABi}. \quad (3.1)$$

Очевидно,

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi}, \quad (3.2)$$

где  $N_{AB}$  – число столкновений частицы за время  $\Delta t$ .

Число  $N_{AB}$  столкновений может быть найдено из следующих соображений. Частица  $A^*$  за время  $\Delta t$ , очевидно, столкнётся столько раз, сколько частиц  $B$  попадёт в объём цилиндрической полости (рис. 3.1, в). Объём полости равен  $\sum_{i=1}^{N_{AB}} Q_{AB} \tau_{ABi} v_{ABi}$ . Тогда, если  $n_B$  – концентрация частиц  $B$ , искомое число столкновений  $N_{AB}$  будет равно

$$N_{AB} = n_B \overline{Q}_{AB} \sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi} v_{ABi}^*. \quad (3.3)$$

Вычислим теперь среднее число столкновений одной частицы в единицу времени (среднюю частоту столкновений):

$$v_{AB} = \frac{N_{AB}}{\Delta t}.$$

Тогда, разделив обе части равенства (3.3) на  $\Delta t$ , найдём

$$v_{AB} = n_B Q_{AB} \frac{\sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi} \cdot v_{ABi}}{\sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi}}. \quad (3.4)$$

По определению статистического среднего, при достаточно больших  $\Delta t$  (практически  $\Delta t \gg t_{ABi}$ ) отношение сумм в (3.4) есть не что иное как средняя относительная скорость движения частиц  $\overline{v}_{AB}$ :

$$\overline{v}_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi} \cdot v_{ABi}}{\sum_{i=1}^{N_{AB}} \tau_{ABi}}. \quad (3.5)$$

Эта величина была найдена ранее методами статистической физики, изложенными во второй главе. Для удобства расчётов в общем случае она может быть выражена через среднюю скорость, например, налетающей частицы  $\overline{u}_A$ , согласно

---

<sup>\*)</sup> Здесь  $Q_{AB}$  считается константой, так что  $\overline{Q}_{AB} = Q_{AB}$ .

$$\bar{v}_{AB} = \sqrt{\frac{m_A + m_B}{m_B}} \cdot \bar{u}_A. \quad (3.6)$$

С учётом (3.5) для средней частоты столкновений частицы сорта  $A$  со всеми частицами сорта  $B$  получим формулу

$$\nu_{AB} = \bar{Q}_{AB} \cdot n_B \cdot \bar{v}_{AB}. \quad (3.7)$$

Очевидно, среднее время свободного пробега частицы  $A$  равно

$$\tau_{AB} = \frac{1}{\nu_{AB}} = \frac{1}{\bar{Q}_{AB} \cdot n_B \cdot \bar{v}_{AB}}. \quad (3.8)$$

Это позволяет найти выражение для средней длины свободного пробега частиц  $A$  при заданном виде столкновения  $\bar{Q}_{AB}$  из определения:

$$l_{AB} = \tau_{AB} \cdot \bar{u}_{AB}. \quad (3.9)$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега частиц  $A$  в газе  $B$  будет равна

$$l_{AB} = \frac{1}{\left(\frac{m_A + m_B}{m_B}\right)^{1/2} \bar{Q}_{AB} \cdot n_B}. \quad (3.10)$$

Как видим, средняя длина свободного пробега частиц обратно пропорциональна эффективному сечению соударений  $\bar{Q}_{AB}$  и концентрации частиц  $n_B$ .

Так как ионизованный газ представляет собой смесь частиц различного рода, то число всех столкновений отдельной частицы сорта  $A$  в единицу времени будет определяться столкновениями со всеми частицами-мишенями газа. Эта величина называется полной частотой столкновений частицы  $A$  и определяется соотношением

$$\nu_A = \sum_l \nu_{Al},^* \quad (3.11)$$

где индекс  $l$  приобретает значения, соответствующие компонентам ионизованного газа:  $l=e, i, a...$ , включая  $l=A$ , т.е. столкновения с частицами собственного газа. С учётом (3.7) полная частота столкновений частиц сорта  $A$  записывается в виде

$$\nu_A = \sum_l n_l \nu_{Al} \bar{Q}_{Al}. \quad (3.12)$$

Среднее время свободного пробега частицы  $A$  в многокомпонентной смеси равно

---

<sup>\*)</sup> В силу аддитивности величины  $N_{AB}$  число столкновений «пробной» частицы  $A$  с частицами других сортов будет равно  $N_A = \sum_l n_l \bar{Q}_{Al} \sum_{i=1}^{N_{Al}} \tau_{Ali} \nu_{Ali}$ . Тогда полная частота столкновений

$$\nu_A = \frac{N_A}{\Delta T} = \sum_l \nu_{Al}, \text{ где } \nu_{Al} = n_l \bar{Q}_{Al} \bar{v}_{Al}.$$

$$\tau_A = \frac{1}{\nu_A} = \frac{1}{\sum_l n_l \bar{v}_{Al} \bar{Q}_{Al}}. \quad (3.13)$$

Средняя длина свободного пробега частиц сорта  $A$  в многокомпонентной смеси, по определению, равна

$$l_A = \bar{u}_A = \frac{1}{\sum_l \left( \frac{m_A + m_l}{m_l} \right)^{1/2} n_l \bar{Q}_{Al}}. \quad (3.14)$$

Как указывалось, эффективное поперечное сечение является характеристикой вероятности какого-либо процесса, происходящего при столкновении частиц. Например, в теории процессов переноса (теплопроводность, вязкость) определяющую роль играет так называемое эффективное поперечное сечение упругих столкновений с передачей импульса  $\bar{Q}_{AB}^i$ . Эта величина характеризует процесс хаотизации импульса частиц. Как следует из (2.20),

при каждом соударении изменение импульса частицы  $A$  пропорционально фактору  $\frac{m_B}{m_A + m_B}$ .

Таким образом, для процесса хаотизации импульса маловероятно, что тяжёлые частицы будут заметно отклоняться при столкновениях с лёгкими частицами ( $m_A \gg m_B$ ), и поэтому при вычислении средней длины свободного пробега  $l_A^{(i)}$  влиянием таких столкновений можно пренебречь. Например, при столкновении иона или атома с электроном импульс тяжёлых частиц практически не изменяется, так как фактор  $\frac{m_B}{m_A + m_B} \ll 1$ .

Чтобы определить частоту столкновений, приводящих к полной хаотизации импульса частиц сорта  $A$  в результате столкновений её с частицами сорта  $l$ , рекомендуется величину под знаком суммы в (3.12) умножить на фактор  $2 \frac{m_l}{m_A + m_l}$  [3]. Множитель 2 введён, чтобы придать этому выражению вид, обычный для частоты столкновений в случае, когда  $m_A = m_l$ . Таким образом, средняя длина свободного пробега для процесса хаотизации импульса  $l_A^{(i)}$  может быть представлена в виде

$$l_A^{(i)} = \frac{1}{\sum_l 2 \left( \frac{m_l}{m_A + m_l} \right)^{1/2} n_l \bar{Q}_{Al}}. \quad (3.15)$$

Применим полученные соотношения к простейшему трёхкомпонентному ионизованному газу. Прежде всего приведём эффективные поперечные сечения с передачей импульса для процесса столкновений заряженных частиц [3]:

$$\bar{Q}_{ei} = \bar{Q}_{ee} = \bar{Q}_{ii} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 kT} \right)^2 \ln \lambda, \quad (3.16)$$

где  $\lambda = 12\pi n_e l_D^3$ , а  $\ln \lambda$  называется кулоновским логарифмом.

В отличие от газокINETического\*) эффективное поперечное сечение заряженных частиц сильно зависит от температуры, уменьшаясь с ростом температуры, и слабо (логарифмически) зависит от концентрации электронов. Например, для плазмы дуговых разрядов, в которых температура составляет  $10^4$  К, а концентрация электронов –  $10^{22}$  м<sup>-3</sup> (см. рис. 1.2), эффективное сечение  $\bar{Q}_{ei} \approx 3 \cdot 10^{-17}$  м<sup>2</sup>, в то время как газокINETические эффективные сечения имеют порядок  $10^{-19}$  м<sup>2</sup>.

Рассмотрим среднюю длину свободного пробега электронов и ионов в ионизованном газе для процесса хаотизации импульса. Согласно (3.15) с учётом соотношения между массами частиц (2.36) и (2.37) и условия квазинейтральности найдём следующее выражение для средней длины свободного пробега электронов в ионизованном газе:

$$l_e^{(1)} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 2)n_e \bar{Q}_{ei} + 2n_a \bar{Q}_{ea}}. \quad (3.17)$$

Здесь  $\bar{Q}_{ea}$  - эффективное поперечное сечение столкновений электронов с атомами. Оно по порядку величины в большинстве случаев соизмеримо с газокINETическим и составляет величину порядка  $10^{-20} \dots 10^{-19}$  м<sup>2</sup>. Средняя длина свободного пробега ионов в ионизованном газе при тех же предположениях согласно (3.15) может быть представлена в виде

$$l_i^{(1)} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 2)n_e \bar{Q}_{ei} + 2n_a \bar{Q}_{ia}}, \quad (3.18)$$

где  $\bar{Q}_{ia}$  - эффективное поперечное сечение столкновений ионов с атомами, которое в большинстве случаев составляет величину порядка  $10^{-18} \dots 10^{-19}$  м<sup>2</sup>.

В связи с рассматриваемым вопросом столкновений в ионизованном газе уточним понятия сильно и слабо ионизованного газа. В сильно ионизованном газе (в предельном случае полностью ионизованной плазмы) происходят преимущественно электрон-ионные столкновения:  $n_a \bar{Q}_{ea}, n_a \bar{Q}_{ia} \ll n_e \bar{Q}_{ei}$ . Средняя длина свободного пробега в этом случае определяется соотношениями

$$l_e^{(1)} \approx \frac{1}{3,41 n_e \bar{Q}_{ei}} \quad \text{и} \quad l_i^{(1)} \approx \frac{1}{1,41 n_e \bar{Q}_{ei}}.$$

Для слабо ионизованного газа, когда  $n_i \bar{Q}_{ei} \ll n_a \bar{Q}_{ea}; n_a \bar{Q}_{ia}$ , средняя длина свободного

---

\*) Зависимость эффективного поперечного сечения столкновений атомов (газокINETического) от температуры даётся формулой Сюзерленда:  $\bar{Q}_{aa} = \bar{Q}_{\infty} (1 + \frac{c}{T})$ , где  $\bar{Q}_{\infty}$  и  $c$  – характерные для каждого газа постоянные величины.



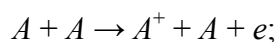
пробега электронов и ионов определяется преимущественно столкновениями с атомами.

### § 3.2. Скорости неупругих столкновений частиц в ионизованном газе

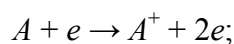
Кроме упругих, в ионизованных газах могут происходить неупругие столкновения, характеризующиеся изменением внутреннего состояния частиц. В результате этих процессов часть кинетической энергии сталкивающихся частиц расходуется на изменение их состояний.

Неупругие столкновения также характеризуются соответствующими эффективными сечениями. В качестве примеров неупругих процессов столкновения в ионизованном газе назовём следующие:

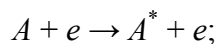
ионизация атома при столкновении с другим атомом



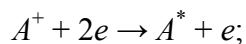
ионизация атома электронным ударом



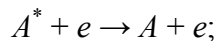
возбуждение атома электронным ударом



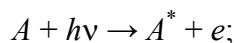
рекомбинация иона и электрона при тройном соударении, когда третьей частицей является электрон



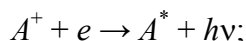
тушение возбуждённого атома электронным ударом



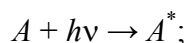
фотоионизация



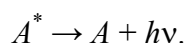
фоторекомбинация



возбуждение атома при столкновении с резонансным фотоном



спонтанное излучение фотона возбуждённым атомом



В результате неупругих столкновений, как видно, происходят с определёнными скоростями превращения частиц.

Изменение числа частиц определённого сорта за счёт неупругого соударения в единице объёма за единицу времени называется скоростью процесса -  $\frac{\delta n_k}{\delta t}$ ,  $k$  – символ частицы.

Скорости процессов неупругих соударений определяют состояние ионизированного газа и, следовательно, являются важнейшими макроскопическими величинами физики ионизированных газов.

Ясно, что скорости процессов неупругих взаимодействий определяются столкновениями и представляют собой среднее число соударений данного типа в единице объёма за единицу времени.

Определим полную скорость процесса  $A+B$  -  $\left(\frac{\delta n_A}{\delta t}\right)_{AB}$ , т.е. полное число столкновений в единице объёма в единицу времени между налетающими частицами сорта  $A$  и частицами-мишенями сорта  $B$ . Так как величина  $v_{AB}$  определяет среднюю частоту столкновений одной частицы сорта  $A$  со всеми частицами сорта  $B$ , то для определения полной скорости процесса достаточно величину  $v_{AB}$  умножить на число частиц сорта  $A$  -  $n_A$ . Таким образом, полная скорость процесса  $A+B$  даётся выражением

$$\left(\frac{\delta n_A}{\delta t}\right)_{AB} = n_A n_B \bar{v}_{AB} \bar{Q}_{AB}. \quad (3.19)^*$$

\* (В книге формула (3.19) пропущена, и после (3.18) идёт сразу (3.20). В настоящем издании нумерация формул идёт по порядку, ссылки приведены в соответствие с новой нумерацией. - прим. авт. скана).

Из (3.19), в частности, следует, что

$$\left(\frac{\delta n_A}{\delta t}\right)_{AB} = \left(\frac{\delta n_B}{\delta t}\right)_{AB}. \quad (3.20)$$

Если падающие частицы и частицы-мишени идентичны, то в формуле (3.19) каждое столкновение учитывается дважды, а поэтому при взаимодействии типа  $A+A$

$$\left(\frac{\delta n_A}{\delta t}\right)_{AA} = \frac{1}{2} n_A^2 \bar{v}_A \bar{Q}_{AA}. \quad (3.21)$$

Вводя соответствующие эффективные сечения, например, беря их значения из эксперимента, можно определить скорости отдельных процессов и групп процессов в ионизованном газе.

### § 3.3. Скорости процессов ударной ионизации и тройной рекомбинации.

#### Ионизационное равновесие

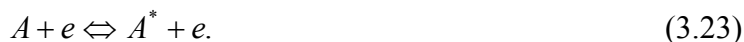
В качестве практически важного примера скоростей процессов неупругих соударений в ионизированном газе рассмотрим процессы ионизации атома электронным ударом и тройной рекомбинации. Первый будем считать – прямым процессом, а второй – обратным.

Обратным считается процесс, имеющий в качестве начального конечное, а в качестве конечного – начальное состояние прямого процесса.

Рассматриваемые процессы ударной ионизации атома и обратного ему – тройной рекомбинации – могут быть записаны в виде следующей реакции:

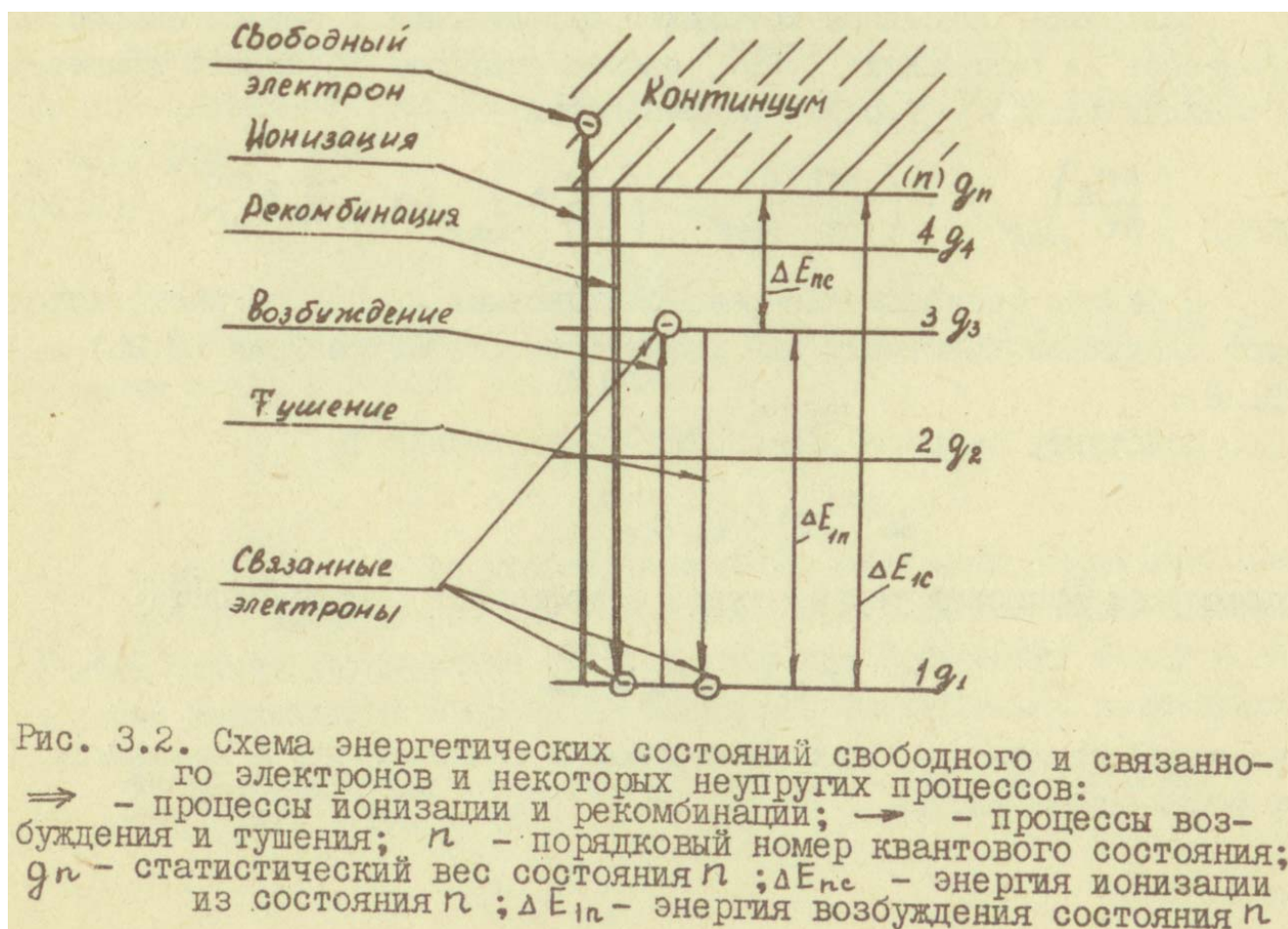


Приведём ещё один пример важных в физике ионизованного газа неупругих процессов: возбуждение атома и тушение возбуждённого атома электронным ударом. Символически указанные прямой и обратный процессы записываются в виде



В формулах (3.23) и (3.22) введены символы:  $A$  – атом в основном состоянии,  $A^+$  – ионизированный атом  $A$ ,  $A^*$  – возбуждённый атом,  $e$  – электрон.

На рис. 3.2 представлены диаграмма энергетических состояний свободного и связанного электрона, а также схематически показаны процессы ионизации и рекомбинации, возбуждения и тушения.



Как видно из (3.22), в результате прямого процесса ионизации исчезают атомы, т.е.

скорость процесса  $\left( \frac{\delta n_A}{\delta t} \right)_{Al} < 0$ , или возникают с той же скоростью ионы и электроны:

$$\left( \frac{\delta n_e}{\delta t} \right)_{Al} = \left( \frac{\delta n_i}{\delta t} \right)_{Al} > 0.$$

Согласно определению полной скорости процесса (3.19) для прямого процесса (3.22) найдём

$$-\left( \frac{\delta n_A}{\delta t} \right)_{Al} = \left( \frac{\delta n_e}{\delta t} \right)_{Al} = \left( \frac{\delta n_i}{\delta t} \right)_{Al} = n_A n_e \bar{v}_{Al} \bar{Q}_{Al}^{(nc)}. \quad (3.24)$$

где  $\bar{Q}_{Al}^{(nc)}$  - среднее эффективное сечение неупругого столкновения электрона с атомом с ионизацией атома, т.е. с удалением электрона из области связанных состояний в область свободных состояний (рис. 3.2). Область свободных состояний называют ещё континуумом (рис. 3.2). Если ввести символ  $C$  для обозначения этой области,  $n$  – области связанных состояний ( $n$  – номер состояния), то верхний комплекс индексов в символе эффективного сечения будет обозначать характер изменения состояния частиц.

Например,  $(nc)$  – переход электрона из области связанных состояний в область свободных (континуум). Комплекс символов снизу обозначает взаимодействующие частицы.

Пользуясь описанной методикой определения и записи скоростей процессов на основании (3.19), найдём скорости обратного процесса в реакции (3.22) – тройной рекомбинации:

$$-\left( \frac{\delta n_e}{\delta t} \right)_{eeA^+} = -\left( \frac{\delta n_i}{\delta t} \right)_{eeA^+} = \left( \frac{\delta n_A}{\delta t} \right)_{eeA^+} = n_e n_i \bar{v}_{ei} \bar{Q}_{eA^+}^{(cn)}. \quad (3.25)$$

В физике ионизационно-рекомбинационных процессов часто используют следующие константы для расчёта скоростей реакций (3.24) и (3.25):

константу скорости ионизации из состояния  $n$

$$\alpha^{(nc)}(T) = \bar{v}_{Al} \bar{Q}_{Al}^{(nc)},$$

являющуюся функцией температуры;

коэффициент рекомбинации

$$b^{(cn)}(n_e, T) = \bar{v}_{ei} \bar{Q}_{eeA^+}, \quad (3.26)$$

зависящий от концентрации электронов и температуры, и

константу скорости рекомбинации

$$\beta^{(cn)}(T) = \frac{b^{(cn)}(n_e, T)}{n_e}. \quad (3.27)$$

Имея в виду введённые константы, скорости процессов ионизации электронным ударом и тройной рекомбинации можно представить соответственно в виде

$$\left( \frac{\delta n_e}{\delta t} \right)_{Al} = \alpha^{(nc)}(T) n_A n_e; \quad (3.28)$$

$$\left( \frac{\delta n_e}{\delta t} \right)_{eeA^+} = -\beta^{(cn)}(T) n_i n_e^2. \quad (3.29)$$

Предположим, что в ионизованном газе происходят процессы возникновения и исчезновения заряженных частиц по причине ударной ионизации и тройной рекомбинации. За счёт этих процессов изменяется концентрация электронов. Очевидно, скорость изменения количества электронов в газе определяется суммой скоростей (3.28) и (3.29) с учётом связанных состояний. Это позволяет сформулировать закон изменения концентрации электронов в ионизованном газе по указанным причинам в виде

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e \sum_{n=1}^{n=n_\infty} \alpha^{(nc)}(T) n_{An} - n_i n_e^2 \sum_{n=n}^{n=1} \beta^{(cn)}(T). \quad (3.30)$$

Константы процессов  $\alpha^{(nc)}$  и  $\beta^{(cn)}$  могут быть взяты из экспериментов или найдены теоретическим путём<sup>\*)</sup>,  $n_\infty$  - номер последнего связанного состояния.

Важно отметить, что в (3.30) суммарная скорость рекомбинации во все связанные состояния может быть выражена через суммарную константу рекомбинации

$$\beta(T) = \sum_{n=n_\infty}^{n=1} \beta^{(cn)}(T). \quad (3.31)$$

В качестве примера приведём значение этой константы для  $z$ -кратных ионов согласно [4] в единицах СИ:

$$\beta(T) = \frac{1,64 \cdot 10^{-21} z^3}{T^{9/2}} \left[ \frac{M^6}{c} \right]. \quad (3.32)$$

Если  $\frac{dn_e}{dt} \neq 0$ , то процесс ионизации считается неравновесным. При  $\frac{dn_e}{dt} = 0$  имеет место так называемое ионизационное равновесие. В этом случае устанавливается динамическое равновесие между количеством возникающих в процессе ионизации электронов и исчезающих за счёт рекомбинации. Это динамическое равновесие согласно так называемому принципу детального равновесия в условиях термодинамического равновесия имеет место для каждого индивидуального прямого и обратного процессов. Это означает, что в условиях ионизационного равновесия скорости процессов (3.28) и (3.29) равны

$$\alpha^{(nc)}(T) n_A n_e = \beta^{(cn)}(T) n_i n_e^2. \quad (3.33)$$

Отсюда находится важное для физики ионизованных газов соотношение:

$$\frac{n_e n_i}{n_A} = \frac{\alpha^{(nc)}(T)}{\beta^{(cn)}(T)}. \quad (3.34)$$

---

<sup>\*)</sup> Например, расчёт и конкретные выражения для констант  $\alpha$  и  $\beta$  можно найти в книге [4].

Отношение, стоящее в правой части уравнения (3.34), зависит лишь от температуры и микроскопических свойств атомов и ионов и называется константой ионизационного равновесия:

$$K^{(nc)}(T) = \frac{\alpha^{(nc)}(T)}{\beta^{(cn)}(T)}. \quad (3.35)$$

Следовательно, в условиях ионизационного равновесия существует соотношение между термодинамическими параметрами ионизованного газа вида

$$\frac{n_e n_i}{n_A} = K^{(nc)}(T).$$

Расчёт величины  $K^{(nc)}(T)$  требует привлечения законов квантовой механики и выходит за рамки данного пособия.

Приведём значение константы ионизационного равновесия для процесса ионизации из состояния  $K$  при условии образования иона в основном состоянии –  $A^+$ :

$$K^{(nc)}(T) = 2 \frac{g_i^+}{g_k} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_{nc}}{kT}\right). \quad (3.36)$$

В этой формуле:

$\Delta E_{nc}$  – энергия ионизации из состояния  $n$  (рис. 3.2);  $g_n$  – статистический вес  $n$ -го состояния;  $g_1^+$  – статистический вес основного состояния иона;  $h$  – постоянная Планка.

Таким образом, на основании (3.36) концентрация  $n_1^+$  однократно ионизованных положительных ионов в основном состоянии и соответствующая плотность  $n_n$  нейтральных атомов в  $n$ -м состоянии связаны с плотностью  $n_e$  свободных электронов в условиях ионизационного равновесия уравнением

$$\frac{n_e n_i^+}{n_n} = 2 \frac{g_i^+}{g_k} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_{nc}}{kT}\right), \quad (3.37)$$

носящим название уравнения Саха.

#### § 3.4. Расчёт состава термически равновесного ионизованного газа

Покажем, что в условиях ионизационного равновесия задание давления  $p$  и температуры  $T$  позволяет полностью рассчитать состав термодинамически равновесного ионизованного газа.

Действительно, в этих условиях, кроме уравнения Саха (3.37), имеет место распределение Больцмана для возбуждённых состояний атома

$$n_k = n_1 \frac{g_k}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta E_{1k}}{kT}\right), \quad (3.38)$$

где  $k = 2, 3, 4, \dots, n_\infty$ ,

а также уравнение состояния

$$\rho = (n_a + n_1^+ + n_e)kT, \quad (3.39)$$

где концентрация нейтральных частиц  $n_a$  равна сумме числа атомов во всех состояниях от  $k=1$  до  $k=k_\infty$ :

$$n_a = \sum_{k=1}^{k=k_\infty} n_k. \quad (3.40)$$

С учётом (3.38)  $n_a$  может быть выражена через концентрацию основного состояния  $n_1$  и температуру согласно формуле

$$n_a = \frac{n_1}{g_1} z(T), \quad (3.41)$$

где величина

$$z(T) = \sum_{k=1}^{n_\infty} g_k \exp\left(-\frac{\Delta E_{1k}}{kT}\right) \quad (3.42)$$

носит название статистической суммы по состояниям для рассматриваемого типа частиц.

Учитывая, кроме того, условие квазинейтральности  $n_1^+ = n_e$  уравнение состояния можно представить в виде

$$p = \left[ \left( 2n_e + \frac{n_1}{g_1} z(T) \right) \right] kT. \quad (3.43)$$

Уравнение Саха (3.37) с учётом (3.38) может быть преобразовано к удобному для решения поставленной задачи виду:

$$\frac{n_e^2}{n_1} = 2 \frac{g_1^+}{g_1} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_{1c}}{kT}\right), \quad (3.44)$$

где учтено также условие квазинейтральности.

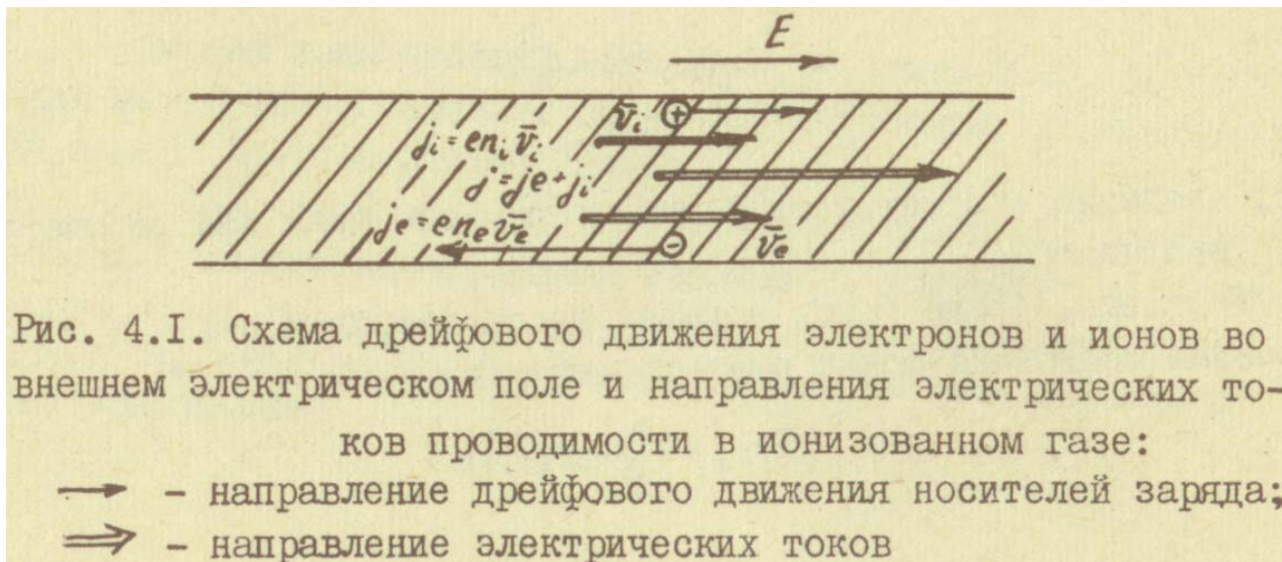
Состав ионизованного газа определяется при заданных термодинамических параметрах концентрациями электронов  $n_e$ , атомов в основном состоянии  $n_1$  и  $n_\infty-1$  атомов в возбуждённом состоянии  $n_k$ . Всего неизвестных  $n_\infty+1$ . Система уравнений равновесного ионизованного газа (3.44), (3.43) и (3.38) состоит также из  $n_\infty+1$  уравнения и, следовательно, позволяет решить задачу о составе ионизованного газа.

В области низкотемпературной плазмы согласно (3.38)  $n_k \ll n_1$ , так что на основании (3.42)  $z(T) \approx g_1$ . В таком случае система уравнений для расчёта состава низкотемпературного ионизованного газа, характеризующегося величинами  $n_e$  и  $n_1$ , сводится к уравнению Саха (3.44) и уравнению (3.4), которое принимает вид

$$p = (2n_e + n_1)kT. \quad (3.45)$$

## § 4.1. Электрический ток проводимости, электропроводность

При наложении внешнего электрического поля  $E$  в ионизованном газе в направлении этого поля появляется преимущественное движение электронов и положительно заряженных ионов (рис. 4.1).



В результате соударений носителей электрического заряда – электронов и ионов – со всеми частицами ионизованного газа устанавливается при заданной напряжённости электрического поля некоторое преимущественное направленное движение заряженных частиц вдоль силовых линий поля. Таким образом, в ионизованном газе при наличии внешнего электрического поля возможен специфический для этого состояния вещества процесс переноса электрического заряда – электрический ток проводимости. Если состояние ионизованного газа таково, что градиенты концентрации электронов и температуры пренебрежимо малы, то плотность электрического тока проводимости определяется по закону Ома, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (4.1)$$

где  $\sigma$  - электропроводность ионизованного газа.

Приближенное выражение для  $\sigma$  может быть найдено на основании элементарной молекулярно-кинетической теории.

Рассмотрим движение какой-нибудь частицы ионизованного газа массой  $m_q$  с зарядом  $q$ . Под действием электрического поля эта частица приобретает направленную скорость  $\vec{v}_q$ , называемую **скоростью дрейфа**. Плотность электрического тока частиц сорта  $q$  есть не что иное как плотность потока электрического заряда, по определению равного (см. § 2.1):



$$\vec{j}_q = q n_q \vec{v}_q. \quad (4.2)$$

Суммарная плотность потока электрических зарядов всех знаков в ионизованном газе определяет плотность тока  $\vec{j}$  и будет равна (4.2):

$$\vec{j} = \sum_k q_k n_k \vec{v}_k, \quad (4.3)$$

где величина  $q_k$  может принимать значения  $q_e = -e$ ,  $q_i = ze$ , причём  $k = e, i, \dots$ .

Задача расчёта электропроводности сводится к определению дрейфовой скорости заряда  $q$ . Во многих случаях оказывается, что скорость дрейфа  $\bar{v}$  значительно меньше средней скорости  $\bar{u}$ :  $\bar{v} \ll \bar{u}$ ; это означает, что движение заряженных частиц в электрическом поле почти также хаотично, как и без него.

Действие поля  $E$  сводится только к лёгкому искривлению траекторий частиц между столкновениями в направлении силы  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Рассмотрим движение заряженной частицы между какими-либо двумя столкновениями, то есть, в течение времени свободного пробега  $\tau_k$ . Пусть электрическое поле направлено вдоль оси  $x$  –  $E = E_x$ . Уравнение движения частицы между столкновениями имеет вид

$$m_q \frac{dv_{xq}}{dt} = qE_x, \quad (4.4)$$

откуда для произвольного интервала  $\tau_k$

$$v_{xq}^{(k)} = \frac{qE_x}{m_q} \tau_k + v_{xq}^{(k)}(0). \quad (4.5)$$

Проведём суммирование получаемых значений  $v_{xq}^{(k)}$  за время  $\Delta t$ , значительно большее, чем среднее время парного столкновения  $\tau$ . Тогда из (4.5) найдём

$$\sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)} = \frac{qE_x}{m_q} \sum_{k=1}^{N_q} \tau_k + \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}(0). \quad (4.6)$$

Здесь  $N_q$  – число столкновений частицы  $q$  со всеми другими, а  $\sum_{k=1}^{N_q} \tau_k = \Delta t$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)} = \frac{qE_x}{m_q} \Delta t + \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}(0). \quad (4.7)$$

В силу определения средней частоты столкновений  $\nu_q = \frac{N_q}{\Delta t}$ , где  $\nu_q = \frac{1}{\tau_q}$ , исключаем из

(4.7) интервал времени  $\Delta t$ . Это позволяет также представить соотношение (4.7) в виде

$$\frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)} = \frac{qE_x}{m_q} \tau_q + \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}(0). \quad (4.8)$$

Физический смысл отдельных слагаемых в этом уравнении следующий. Величина

$\frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}$  есть средняя направленная скорость частицы  $q$ :

$$\bar{v}_{xq} = \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}, \quad (4.9)$$

а  $\frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}(0)$  - средняя начальная скорость частицы  $q$  сразу после столкновения:

$$\bar{v}_{xq}(0) = \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} v_{xq}^{(k)}(0). \quad (4.10)$$

Как указывалось, движение заряженных частиц в электрическом поле почти также хаотично, как и без него, поэтому можно допустить, что результатом каждого столкновения является возвращение частицы в равновесное состояние. Таким образом, после столкновения все направления скорости частицы  $q$  равновероятны и  $\bar{v}_{xq}(0) = 0$ . С учётом последнего соображения и (4.9) уравнение усреднённого движения примет вид

$$\bar{v}_{xq} = \frac{qE_x}{m_q} \tau_q. \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что благодаря столкновениям в ионизованном газе при наличии внешнего электрического поля частица с массой  $m_q$  и зарядом  $q$  движется с установившейся направленной скоростью  $\bar{v}_{xq}$ , определяемой из равенства силы воздействия поля  $qE_x$ , и некоторой силы «трения» -  $\frac{m_q \bar{v}_{xq}}{\tau_q}$ .

Соотношение (4.11) можно представить в векторной форме в виде

$$\vec{v}_q = b_q \vec{E}, \quad (4.12)$$

где величина

$$b_q = \frac{q \tau_q}{m_q}, \quad (4.13)$$

называется подвижностью частицы  $q$ . По определению,

$$b_q = \frac{v_q}{E} - \quad (4.14)$$

подвижность частицы, есть физическая величина, численно равная скорости направленного движения частиц в газе при напряжённости электрического поля, равной 1 В/м.

Как следует из (4.12), подвижность определяется зарядом, массой и характером столкновений частиц. Особенностью среднего времени потерь импульса  $\tau_q$  в процессе

электропроводности является то, что для электронов оно приближённо определяется потерей импульса при столкновениях с ионами и атомами, то есть

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ea}}, \quad (4.15)$$

причём  $\frac{1}{\tau_{ei}} = \nu_{ei} = n_e \bar{u}_e \bar{Q}_{ei}$ ,  $\frac{1}{\tau_{ea}} = \nu_{ea} = n_a \bar{u}_e \bar{Q}_{ea}$ , где  $\bar{Q}_{ei}$  и  $\bar{Q}_{ea}$  - эффективные поперечные сечения столкновений с передачей импульса.

Найдём плотность электрического тока, создаваемого дрейфом частиц сорта  $q$ . Согласно (4.2) и (4.12) найдём

$$\vec{j}_q = \sigma_q \vec{E}, \quad (4.16)$$

где

$$\sigma_q = q n_q b_q = \frac{q^2 n_q}{m_q \nu_q} = \frac{q^2 n_q \tau_q}{m_q} - \quad (4.17)$$

электропроводность компонента  $q$  ионизованного газа.

Полная плотность электрического тока в ионизованном газе будет согласно (4.3) равна

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (4.18)$$

где

$$\sigma = \sum_k q_k n_k b_k, \quad (4.19)$$

или

$$\sigma = \sum_k \frac{q_k^2 n_k \tau_k}{m_k} - \quad (4.20)$$

электропроводность ионизованного газа.

Как видно, в ионизованном газе имеет место закон Ома. Наличие электрической проводимости ионизованного газа или плазмы является одной из отличительных и важных особенностей этого состояния вещества.

Проанализируем полученные результаты для электропроводности простейшего ионизованного газа при наличии однократной ионизации.

В этом случае электропроводность в общем определяется электронами и ионами и равна

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i, \text{ где согласно (4.17) } \sigma_e = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \text{ и } \sigma_i = \frac{e^2 n_i \tau_i}{m_i} - \text{ соответственно электронная и}$$

ионная электропроводности.

$$\text{Сравним эти величины - } \frac{\sigma_i}{\sigma_e} = \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\tau_i}{\tau_e}. \text{ Оценим это отношение в двух крайних случаях}$$

сильно и слабо ионизованного газа. В первом случае с учётом (3.18) и (4.15) найдём

$$\sigma_e = \frac{e^2}{m_e \bar{u}_e \bar{Q}_{ei}}, \quad \sigma_i = \frac{e^2}{\sqrt{2} m_i \bar{u}_i \bar{Q}_{ei}}. \quad (4.21)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_e} = \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (4.22)$$

то есть электропроводность сильно ионизованного газа практически определяется электропроводностью электронов. Подставляя в соотношение (4.21) явные выражения для средней скорости электронов  $\bar{u}_e$  согласно (2.16) и эффективное поперечное сечение  $\bar{Q}_{ei}$  из (3.16), найдём

$$\sigma \approx 0,77 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} [\text{Ом} \cdot \text{м}]^{-1}, \quad (4.23)$$

где температура выражена в градусах Кельвина.

Более строгий учёт процессов столкновений электронов приводит к аналогичной формуле, отличающейся от приближенной (4.23) лишь численным множителем, равным 1,98, так что

$$\sigma \approx 1,53 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} [\text{Ом} \cdot \text{м}]^{-1}. \quad (4.24)$$

Кулоновский логарифм является медленно меняющейся функцией термодинамических параметров. Например, в диапазоне концентраций электронов  $(10^{18} \dots 10^{22}) \text{ м}^{-3}$ , характерных для дуговых разрядов различного типа, когда удовлетворяется условие идеальности плазмы, при температуре  $10^4 \text{ К}$  величина  $\ln \Lambda$  лежит в интервале 9,43...4,82, а для температуры  $10^6 \text{ К}$  – 15,9...11,3. поэтому, принимая по порядку величины  $\ln \Lambda \sim 10$ , электропроводность сильно ионизованного газа или полностью ионизованной плазмы можно оценить по очень простой формуле:

$$\sigma \approx 10^{-3} \cdot T^{3/2} [\text{Ом} \cdot \text{м}]^{-1}. \quad (4.25)$$

Так, например, в случае низкотемпературной плазмы дугового разряда  $T \sim 10^4 \text{ К}$  и, следовательно, электропроводность составляет  $10^3 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ ; в плазме мощных высоковольтных разрядов достигаются температуры порядка  $10^6 \text{ К}$ , при которых  $\sigma \sim 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ ; при температурах порядка  $10^8 \text{ К}$ , достигаемых в установках для термоядерных реакций, область высокотемпературной, или термоядерной, плазмы  $\sigma \sim 10^9 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ , что превосходит электропроводность наилучших металлических проводников, например, для меди  $\sigma = 6 \cdot 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ .

Проанализируем особенности электропроводности слабоионизованного газа. Прежде всего оценим электропроводности ионов и электронов. Как указывалось выше, в случае слабо

ионизованного газа средняя длина свободного пробега электронов и ионов определяется их столкновениями с атомами:

$$l_e \approx \frac{1}{n_a \bar{Q}_{ea}}, \quad l_i \approx \frac{1}{\sqrt{2} n_a \bar{Q}_{ia}}.$$

В таком случае отношение ионной электропроводности к электронной может быть оценено по формуле

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_e} \approx \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \cdot \frac{\bar{Q}_{ea}}{\bar{Q}_{ia}}.$$

Эффективные поперечные сечения столкновений электронов и ионов с атомами во многих случаях одного порядка, поэтому в слабо ионизованном газе можно принять  $\frac{\sigma_i}{\sigma_e} \ll 1$ . Таким образом, электропроводность слабо ионизованного газа также определяется в основном электропроводностью электронов:

$$\sigma \approx \sigma_e = \frac{e^2}{m_e \bar{u}_e \bar{Q}_{ea}} \cdot \frac{n_e}{n_a}. \quad (4.26)$$

Как видно, электропроводность слабо ионизованного газа пропорциональна его степени ионизации. Действительно, для слабо ионизованного газа  $\frac{n_e}{n_a} \ll \frac{\bar{Q}_{ea}}{\bar{Q}_{ei}}$ , но так как в рассматриваемых условиях  $\bar{Q}_{ea}/\bar{Q}_{ei} \ll 1$ , то  $n_e/n_a \ll 1$ , следовательно,  $\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_a} \approx \frac{n_e}{n_a} \ll 1$ .

В условиях применимости локального термодинамического равновесия, когда состав ионизованного газа может быть найден на основании уравнения Саха (3.44) и уравнения состояния (3.45), для слабо ионизованного газа ( $n_e \ll n_a$ ) имеем

$$p \approx n_a kT, \quad \frac{n_e^2}{n_a} = 2 \frac{q_1^+}{q_a} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_k}{kT}\right).$$

Отсюда не представляет труда найти явную зависимость степени ионизации слабо ионизованного газа от давления и температуры газа:

$$\frac{n_e}{n_a} = \left[ 2 \left( \frac{2\pi m_e k^{1/3}}{h^2} \right)^{3/2} \frac{q_1^+}{q_a} p^{1/2} T^{1/4} \exp\left(-\frac{\Delta E_k}{2kT}\right) \right]. \quad (4.27)$$

Таким образом, сильная зависимость электропроводности слабо ионизованного газа определяется, главным образом, процессом его ионизации.

#### § 4.2. Диффузионный электрический ток. Соотношение Эйнштейна

При наличии градиентов плотности, так же, как в обычных газах, в ионизованных газах возникает диффузия – поток частиц, направленный в сторону убывания их концентрации. Для слабо ионизованного газа, когда средняя длина свободного пробега электронов и ионов определяется столкновениями преимущественно с атомами, диффузионные потоки заряженных частиц могут быть записаны в виде закона Фика. Например, плотность диффузионного потока электронов

$$\vec{J}_e = -D_e \text{grad}(n_e) \quad (4.28)$$

и ионов

$$\vec{J}_i = -D_i \text{grad}(n_i) \quad (4.29)$$

где  $D_e$  и  $D_i$  – соответственно коэффициенты диффузии электронов и ионов. Согласно элементарной кинетической теории, эти величины могут быть представлены в виде  $D_e = \frac{1}{2} l_e \bar{u}_e$

и  $D_i = \frac{1}{2} l_i \bar{u}_i$ .

Диффузия заряженных частиц приводит к появлению так называемых диффузионных электрических токов,

$$\vec{j}_e = e D_e \text{grad}(n_e); \quad (4.30)$$

$$\vec{j}_i = -e D_i \text{grad}(n_i). \quad (4.31)$$

Ввиду того, что  $D_i \ll D_e$ , определяющим диффузионным током является электронный ток.

Специфической особенностью диффузии заряженных частиц является то, что она почти никогда не происходит в чистом виде, без всякого участия электрического поля. Напротив, упорядоченное перемещение заряженных частиц в определённую сторону само по себе вызывает возникновение или изменение электрического поля. В одних случаях оно содействует диффузионному току, в других – противодействует ему, но всегда результирующий ток при наличии диффузии заряженных частиц есть сумма тока проводимости и тока диффузии:

$$\vec{j}_e = \sigma_e \vec{E} + e D_e \text{grad}(n_e); \quad (4.32)$$

$$\vec{j}_i = \sigma_i \vec{E} - e D_i \text{grad}(n_i). \quad (4.33)$$

Между коэффициентом диффузии и подвижностью существует простое соотношение, не зависящее от конкретных выражений для  $D_q$  и  $b_q$ :

$$\frac{D_q}{b_q} = \frac{kT}{q}. \quad (4.34)$$

Оно носит название соотношения Эйнштейна.

Пусть газ заряженных частиц, находящихся в термодинамическом равновесии, помещён в силовое поле, характеризующееся потенциалом  $\varphi$ . В таком случае плотность указанных частиц будет распределена согласно закону Больцмана  $n_q(x, y, z) = n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi}{kT}\right)$ . Поскольку плотность частиц непостоянна, возникает диффузионный поток, равный

$$\vec{J}_{D_q} = -D_q \nabla n_q = -\frac{q}{kT} n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi}{kT}\right) D_q \nabla \varphi = -\frac{n}{kT} D_q \nabla \varphi = \frac{n}{kT} D_q \vec{E}, \quad (4.35)$$

где  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ .

Но частица в поле действия внешней силы приобретает некоторую скорость дрейфа, пропорциональную напряжённости поля:  $\vec{v}_q = b_q \vec{E}$ . В условиях термодинамического равновесия полный электрический ток должен быть равен нулю:  $\vec{j}_q = q n_q b_q \vec{E} - D_q \nabla n = 0$ .

Отсюда с учётом (4.35) найдём

$$q n_q b_q \vec{E} = \frac{n}{kT} D_q \vec{E}.$$

Из этого равенства следует так называемое соотношение Эйнштейна (4.34) между коэффициентом диффузии и подвижностью заряженных частиц, которое может быть записано в виде

$$b_q = \frac{q}{kT} D_q.$$

#### § 4.3. Электрический ток в скрещенных электрическом и магнитном полях

Рассмотрим вопрос об электропроводности ионизованного газа в электрическом и магнитном полях. При наличии электрического поля с напряжённостью  $\vec{E}$  и магнитного с индукцией  $\vec{B}$  на частицу с зарядом  $q$  между соударениями действует сила Лоренца

$$\vec{F}_{qk} = q \left\{ \vec{E} + \left[ (\vec{u}_{qk} + \vec{v}_{qk}) \times \vec{B} \right] \right\},$$

где  $\vec{v}_{qk}$  - приращение скорости за счёт действия силовых полей, а  $\vec{u}_{qk}$  - хаотическая составляющая полной скорости  $\vec{u}_{qk} + \vec{v}_{qk}$ .

Усредняя эту силу по многим пробегам и учитывая, что  $\vec{u}_q = 0$  по определению, получим

$$\vec{\bar{F}}_q = q \left( \vec{E} + \left[ \vec{\bar{v}} \times \vec{B} \right] \right). \quad (4.36)$$

За счёт соударений под действием этой силы устанавливается преимущественное движение заряженных частиц  $q$  в направлении действующей силы (4.36). Это возможно, если со

стороны газа на частицы  $q$  действует некоторая сила сопротивления, обусловленная потерей направленного импульса сталкивающихся частиц. Полагая эту силу равной  $\frac{m_q \vec{v}_q}{\tau_q}$ , где  $\tau_q$  - среднее время передачи импульса, получим для определения скорости дрейфа заряженных частиц при наличии электрического и магнитного полей уравнение

$$\vec{v}_q = \frac{q \tau_q}{m_q} (\vec{E} + [\vec{v}_q \vec{B}]) \quad (4.37)$$

Умножая (4.37) на  $qn_q$  и учитывая определения (4.17) и (4.2), получим следующее уравнение для электрического тока, обусловленного дрейфом зарядов  $q$ :

$$\vec{j}_q = \sigma_q \vec{E} \pm \frac{1}{B} \omega_q \tau_q [\vec{j}_q \vec{B}] \quad (4.38)$$

Здесь знак минус следует брать для отрицательно заряженных частиц. Причём  $\sigma_q = \frac{q^2 n_q \tau_q}{m_q}$  - электропроводность компоненты  $q$  в отсутствии магнитного поля,  $\omega_q = \frac{qB}{m_q}$  - так называемая циклотронная частота для частиц с удельным зарядом  $\frac{q}{m_q}$ .

Как видно, в теории электрического тока при наличии магнитного поля появляется ещё один характерный параметр  $\omega_q \tau_q$ , определяющий масштаб влияния этого поля на электрические токи. Этот безразмерный параметр называется параметром Холла. Проведём анализ степени влияния магнитного поля на электронный и ионный токи. На основании (4.38) имеем

$$j_e = \sigma_e \vec{E} - \frac{1}{B} \omega_e \tau_e [\vec{j}_e \vec{B}]; \quad (4.39)$$

$$j_i = \sigma_i \vec{E} + \frac{1}{B} \omega_i \tau_i [\vec{j}_i \vec{B}]. \quad (4.40)$$

Прежде выясним физический смысл параметра Холла. Для этого введём понятие радиуса Лармора. Как известно, в однородном поле частица, движущаяся со скоростью  $u_q$  перпендикулярно к силовым линиям магнитного поля, описывает траекторию в виде окружности с радиусом  $r_{Л}$ , величина которого находится на основании закона Ньютона:

$$\frac{m_q u_q^2}{r_{Лq}} = q u_q B.$$

Отсюда найдём ларморовский радиус:

$$r_{Л} = \frac{m_q n_q}{q \vec{B}}. \quad (4.41)$$



Угловая скорость движения частицы по окружности радиуса  $r_{Л}$  равна  $\omega_q = \frac{2\pi}{T_q}$ , где  $T_q$  –

период обращения, который находится из очевидного соотношения

$$T_q = \frac{2\pi r_{Лq}}{u_q}$$

и, следовательно, равен

$$T_q = \frac{2\pi m_q}{q\vec{B}}.$$

Таким образом, угловая скорость

$$\omega_q = \frac{q\vec{B}}{m_q}. \quad (4.42)$$

Эта величина называется циклотронной частотой. Радиус Лармора может быть также представлен в виде

$$r_{Л} = \frac{u_q}{\omega_q}. \quad (4.43)$$

Используя определение (4.43), параметр Холла можно представить в виде отношения средней длины свободного пробега к радиусу Лармора:

$$\omega_q \tau_q = \frac{l_q}{r_{Лq}}. \quad (4.44)$$

Из соотношения (4.44) видно, что влиянием магнитного поля на электрический ток частиц можно пренебречь, если длина свободного пробега значительно меньше радиуса Лармора, то есть при  $\omega_q \tau_q \ll 1$ . В этом случае, очевидно, искривление траекторий частиц за время свободного пробега пренебрежимо мало. При  $\omega_q \tau_q > 1$  влияние магнитного поля на электрический ток велико.

Оценим соотношение параметров Холла для электронов и ионов. Для полностью ионизованной плазмы можно показать, что  $\frac{\omega_e \tau_e}{\omega_i \tau_i} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \gg 1$ . Для слабо ионизованного газа

$$\frac{\omega_e \tau_e}{\omega_i \tau_i} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\bar{Q}_{ia}}{\bar{Q}_{ea}} \gg 1.$$

Как видим, в широком диапазоне параметров можно считать  $\omega_e \tau_e \gg \omega_i \tau_i$ . Полный ток в ионизованном газе при наличии магнитного поля в силу проведённых оценок будет определяться электронным током, а электропроводность – электронной электропроводностью:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} - \frac{1}{B} \omega_e \tau_e [\vec{j} \vec{B}] \quad (4.45)$$

Если электрические и магнитные поля параллельны  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ , плотность тока определяется обычным законом Ома  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

Действительно, пусть  $E = E_x$ ,  $E_y = E_z = 0$ ,  $B = B_x$ ,  $B_y = B_z = 0$ .

Из (4.45) найдём

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma E_x - \frac{1}{B} \omega_e \tau_e (j_y B_z - j_z B_y), \\ j_y &= \sigma E_y - \frac{1}{B} \omega_e \tau_e (j_z B_x - j_x B_z), \\ j_z &= \sigma E_z - \frac{1}{B} \omega_e \tau_e (j_x B_y - j_y B_x). \end{aligned} \quad (4.46)$$

При заданных условиях отсюда будем иметь

$$j_x = \sigma E_x, j_y = 0, j_z = 0.$$

Когда ионизованный газ находится в электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг к другу  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , закон Ома нарушается. В этом случае появляется электрический ток в направлении, перпендикулярном напряжённости электрического поля. Действительно, пусть  $E = E_x$ ,  $E_y = E_z = 0$ ,  $B = B_z$  и  $B_x = B_y = 0$ . Из (4.46) найдём

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma E_x - \omega_e \tau_e j_y, \\ j_y &= \omega_e \tau_e j_x, \\ j_z &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + (\omega_e \tau_e)^2} E_x, \quad (4.47)$$

$$j_y = \frac{\omega_e \tau_e \sigma}{1 + (\omega_e \tau_e)^2} E_x, \quad (4.48)$$

Соотношения (4.47), (4.48) показывают, что в магнитном поле плотность тока в ионизованном газе не параллельна электрическому полю, т.е. закон Ома в обычном виде не проявляется. Наряду с током в направлении электрического поля  $j_x = \sigma_{\parallel} E_x$  возникает ток  $j_y$  в направлении, перпендикулярном векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  –  $j_y = \sigma_{\perp} E_x$ . Этот электрический ток носит название тока Холла, а соответствующая электропроводность – холловской:

$$\sigma_{\perp} = \frac{\omega_e \tau_e \sigma}{1 + (\omega_e \tau_e)^2}. \quad (4.49)$$

Из соотношения (4.47) видно, что электропроводность продольного электрического тока  $j_x = \sigma_{\parallel} E_x$  при наличии магнитного поля равна

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\sigma}{1 + (\omega_e \tau_e)^2}. \quad (4.50)$$

Из соотношений (4.49) и (4.50) видно, что электропроводность ионизованного газа при наличии магнитного поля существенно зависит от величины магнитной индукции. С ростом магнитной индукции продольная электропроводность заметно падает, а поперечная сначала (при  $\omega_e \tau_e < 1$ ) возрастает, а затем (при  $\omega_e \tau_e > 1$ ) тоже падает, но медленнее, чем продольная электропроводность. Специфическими свойствами плазмы в электрическом и магнитном полях в настоящее время широко пользуются при решении различных научных и технических задач.

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЭНЕРГИИ

1. Основные направления использования ионизованных газов в технике

Обширные научные исследования физических свойств ионизованных газов и их особого состояния – плазмы, особенно интенсивно продолжаемые в последние десятилетия, позволили учёным разработать ряд перспективных и важных для народного хозяйства технических устройств, в которых рабочим веществом является ионизованный газ. В данном пособии мы осветим лишь физические принципы использования ионизованных газов в фундаментальных направлениях развития техники. К таким направлениям прежде всего относится проблема плазменных преобразователей энергии: термоядерных реакторов, где источник энергии – реакции ядерного синтеза, а носитель энергии – плазма; МГД-генераторы, в которых происходит прямое преобразование механической энергии движущегося ионизованного газа в электрическую и обратно – превращение электрической энергии в механическую энергию потока ионизованного газа (МГД-ускорители или плазменные ускорители); термоэмиссионные преобразователи энергии, где тепловая энергия непосредственно превращается в электрическую.

Другим фундаментальным направлением развития техники на базе использования ионизованных газов в качестве рабочих веществ является разработка и создание преобразователей вещества. Развитие этого направления открывает возможность создания принципиально новых методов плазменной технологии в различных областях техники. Реализация плазменных технологических процессов позволяет расширить возможности обработки и получения новых материалов и веществ, осуществить быстрое и направленное протекание химических реакций, требующих высокой концентрации энергии в единице объёма, увеличить производительность и повысить чистоту ряда уникальных технологических процессов и т.д.

Так как источниками ионизованного газа в преобразователях вещества служат плазменные ускорители, ограничимся рассмотрением лишь принципов действия некоторых типов этих устройств, в частности, МГД-ускорителей. Для более углублённого знакомства с принципами и направлениями технических применений ионизованных газов рекомендуется ознакомиться с работами [1, 2, 6, 7, 8].

## 2. Магнитодинамические генераторы электроэнергии

В основе процесса преобразования энергии в МГД-генераторе лежит магнитогидродинамический метод прямого преобразования механической энергии потока ионизованного газа в электрическую. Как показали исследования учёных, МГД-генераторы наиболее перспективны при получении очень больших энергий (от нескольких десятков до тысяч мегаватт).

Основная идея МГД-генератора не нова. Она обсуждалась ещё в начале девятых годов прошлого столетия (*пособие написано в XX веке – прим. авт. скана*), однако только в последние годы наметились пути создания реальных конструкций. В развитие этой области науки и техники большой вклад внесли советские учёные.

Рассмотрим принцип действия МГД-генератора. Поток ионизованного газа, в котором значительная часть энергии трансформирована в кинетическую энергию направленного движения, перемещается в канале поперёк силовых линий магнитного поля (рис. П. 1, П. 2).

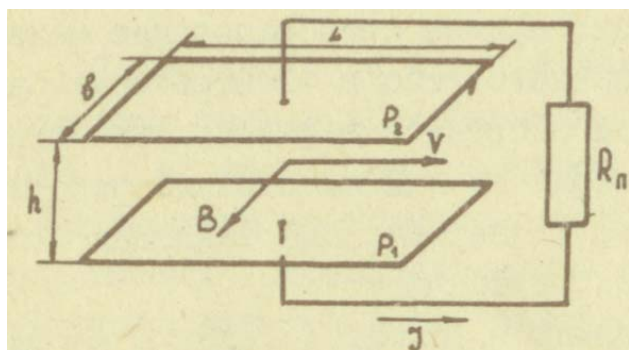


Рис. П.1. Принципиальная схема МГД-генератора

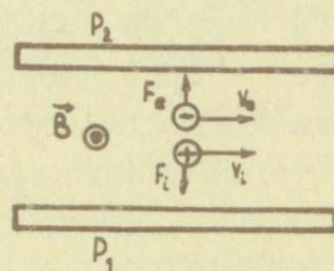


Рис. П.2. Движение заряженных частиц в магнитном поле, перпендикулярном направлению скорости потока ионизованного газа в канале МГД-генератора

Стенками канала, с одной стороны, служат электроды  $P_1$  и  $P_2$  (рис. П. 1), а с другой – изоляторы. К электродам подсоединяется полезная нагрузка  $R_n$ , под воздействием силы Лоренца  $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$  электроны в МГД-канале смещаются к одному электроду ( $P_2$ ), а ионы – к другому ( $P_1$ ) (см. рис. П. 2). В результате вблизи поверхности  $P_1$  появляется избыточный положительный заряд, а вблизи  $P_2$  – отрицательный. Таким образом, между электродами  $P_1$  и  $P_2$  возникает индуцированное электрическое поле  $E$ . При разомкнутой цепи оно определяет ЭДС, возникающую в МГД-генераторе –  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_i = E \cdot h. \quad (\text{П. 1})$$

Поляризация ионизованного газа происходит, очевидно, до тех пор, пока сила Лоренца  $e\nu B$  не уравнивается воздействием электрического поля  $eE$ . Таким образом, из равенства указанных сил  $e\nu B = eE$  находим напряжённость индуцированного электрического поля

$$E = \nu B, \quad (\text{П. 2})$$

и, следовательно, ЭДС, генерируемую в МГД-генераторе:

$$\varepsilon = \nu B h. \quad (\text{П. 3})$$

Рассмотрим электрические и энергетические характеристики МГД-генератора. При замыкании цепи через «плазменный» проводник площадью поперечного сечения  $L \cdot b$  и длиной  $h$  потечёт ток

$$J = \frac{\varepsilon}{R_H + R_P},$$

где

$$R_P = \frac{1}{\sigma} \frac{h}{bL}, \quad (\text{П. 4})$$

$\sigma$  – электропроводность ионизованного газа ( $R_H = R_n$  – полезная нагрузка – прим. авт. скана).

При этом полезная электрическая мощность

$$W = \frac{\varepsilon^2 R_H}{(R_H + R_P)^2}.$$

Рассмотрим режим работы МГД-генератора при максимальной полезной мощности. Как известно, это имеет место при  $R_P = R_H$ . В таком случае

$$W_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4R_P}, \quad J_{\max} = \frac{\varepsilon}{2R_P}. \quad (\text{П. 5})$$

С учётом (П. 4) и (П. 5) найдём

$$W_{\max} = \frac{1}{4} \sigma B^2 \nu^2 V, \quad J_{\max} = \frac{1}{2} \sigma \nu B S_{эл}, \quad (\text{П. 6})$$

где  $V = hLB$  – объём канала МГД-генератора;  $S_{эл}$  – площадь одного из электродов. Из (П. 6) можно определить важную характеристику МГД-генератора – плотность тока на электродах:

$$j_{\max} = \frac{J_{\max}}{S_{эл}} = \frac{1}{2} \sigma \nu B. \quad (\text{П. 7})$$

Здесь и далее индекс «max» указывает на то, что параметры рассматриваются при максимальной полезной мощности МГД-генератора.

Входная мощность МГД-генератора, равная выходной мощности источника ионизованного газа, складывается из потока кинетической энергии  $W_K = \nu \frac{\rho \nu^2}{2} S$  и тепловой  $W_T = \nu \rho C_p T S$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения канала.

Вводя понятие расхода рабочего газа

$$G = \rho v S, \quad (\text{П. 8})$$

для потока кинетической энергии получим выражение

$$W_K = G \frac{v^2}{2}, \quad (\text{П. 9})$$

а для полного потока энергии

$$W = G \left( \frac{v^2}{2} + C_p T \right). \quad (\text{П. 10})$$

Для оценок параметров МГД-генератора удобно ввести понятие коэффициента трансформации кинетической энергии:

$$\eta_K = \frac{W_{\max}}{W_K}, \quad \eta_K = \frac{1}{2} \frac{\sigma B^2 V}{G} \quad (\text{П. 11})$$

и коэффициента преобразования полной энергии:

$$\eta = \frac{W_{\max}}{W}, \quad \eta = \frac{\eta_K}{1 + 2 \frac{C_p T}{v^2}}. \quad (\text{П. 12})$$

Из приведённых соотношений видно, что важнейшие характеристики МГД-генератора зависят от электропроводности ионизованного газа. Мощность и эффективность трансформации энергии пропорциональны объёму рабочей части МГД-генератора и существенно зависят от скорости потока и величины магнитной индукции. Приведём примеры численных оценок возможных параметров МГД-генераторов. Для расчёта зададим: размеры канала –  $L = 5$  м,  $b = 1$  м,  $h = 0,5$  м; среднюю температуру  $T = 2500$  К и скорость ионизованного газа –  $v = 10^3$  м/с; индукцию магнитного поля  $B = 1$  Т, электропроводность  $\sigma = 100$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. Для дальнейшего анализа удобно задавать коэффициент трансформации кинетической энергии  $\eta_K$ . Тогда на основании формулы (П. 11) можно найти необходимый расход газа  $G$ , что, в свою очередь, на основании (П. 8) и уравнения состояния слабо ионизованного газа  $p = \frac{1}{\mu} R \rho T$  позволяет найти давление газа:

$$p = \frac{RTG}{\mu v S}. \quad (\text{П. 13})$$

Рассмотрим параметры МГД-генератора при коэффициенте трансформации кинетической энергии  $\eta_K = 0,75$ . Пусть молекулярная масса газа  $\mu = 30$  кг/кмоль, а удельная теплоёмкость  $C_p = 10^3$  Дж/(кг·К). Последовательность и результаты расчёта следующие: из (П. 3) находим величину электродвижущей силы  $\mathcal{E}_i = 500$  В; из (П. 6) – мощность и силу тока  $W_{\max} = 62,5$  Вт,  $J_{\max} = 2,5 \cdot 10^5$  А; из (П. 7) – плотность тока на электродах  $j_{\max} = 5 \cdot 10^4$  А/м<sup>2</sup>; из (П. 11) – расход газа  $G = 167$  кг/с; из (П. 13) – давление газа  $p = 2,3$  ат; из (П. 12) – коэффициент

преобразования полной энергии  $\eta = 0,13$ ; из (П. 12) – необходимую входную мощность  $W = 500$  МВт. Если скорость потока увеличить, например, в два раза ( $v = 2 \cdot 10^3$  м/с), параметры МГД-генератора существенно улучшатся:  $\varepsilon = 1000$  В,  $W_{\max} = 250$  МВт,  $J_{\max} = 5 \cdot 10^5$  А,  $j_{\max} = 10^5$  А/м<sup>2</sup>,  $G = 167$  кг/с,  $p = 2,3$  ат,  $\eta = 0,33$ ,  $W = 750$  МВт.

Дальнейшее повышение эффективности МГД-генератора возможно за счёт последующего преобразования оставшейся главным образом тепловой энергии в электрическую обычным путём.

Таким образом, МГД-генератор – сравнительно низковольтный источник постоянного тока большой величины. Рабочим веществом в МГД-генераторе ионизованный газ. Он может быть получен путём сжигания высококалорийного топлива или в термоядерных реакторах. С точки зрения термической стойкости материала стенок МГД-канала и электродов рабочие температуры газа должны быть ограничены на уровне 2300 – 2800 К. При таких температурах и давлениях порядка нескольких атмосфер газ будет ионизован слабо. В целях повышения электропроводности рабочего газа в поток вводят присадки достаточно легко ионизируемых элементов (вещества с малой энергией ионизации).

### 3. МГД-ускорители

МГД-устройство принципиально обратимо. Предположим, что вместо нагрузки  $R_n$  (рис. П. 1.) подключен источник с ЭДС  $\varepsilon$  (рис. П. 3). Если  $\varepsilon > \varepsilon_i = Bvh$ , направление тока меняется на обратное. Следовательно, изменяется на обратное и направление силы Ампера, действующей на ионизованный газ в магнитном поле, и равной

$$F = JBh \quad (\text{П. 14})$$

Эта сила стремится разогнать поток, вместо того, чтобы тормозить его, как в МГД-генераторе. Ионизованный газ покидает МГД-устройство со скоростью, большей, чем на входе устройства. В то же время сила реакции, действующая на магнитную систему, стремится сдвинуть МГД-устройство в противоположном направлении действия силы Ампера. Таким образом, МГД-ускоритель действует как реактивный двигатель с тем отличием, что вместо топлива используется ионизованный газ, а вместо теплоты сгорания – электрическая энергия.

Как известно из механики, сила реакции потока, истекающего в вакуум со скоростью  $v$  и расходом  $G$ , равна

$$F_R = vG \quad (\text{П. 15})$$

Приравнявая (П. 14) и (П. 15), найдём величину скорости истечения при заданных  $B, J, h$  и  $G$ :

$$v = \frac{JBh}{G}. \quad (\text{П. 16})$$



Работа силы (П. 14) в единицу времени

$$W_K = Fv = \frac{J^2 B^2 h^2}{G} \quad (\text{П. 17})$$

представляет собой мощность, развиваемую МГД-ускорителем.

Приведём пример численной оценки ожидаемых параметров МГД-ускорителя. В современных газоразрядных устройствах можно достичь следующих параметров:  $B = 10^{-2}$  Т,  $J = 10^4$  А,  $G = 10^{-4}$  кг/с,  $h = 0,1$  м. Тогда на основании (П. 14), (П. 16) и (П. 17) найдём:  $F_R = 1$  Н,  $v = 100$  км/с,  $W_K = 1$  МВт.

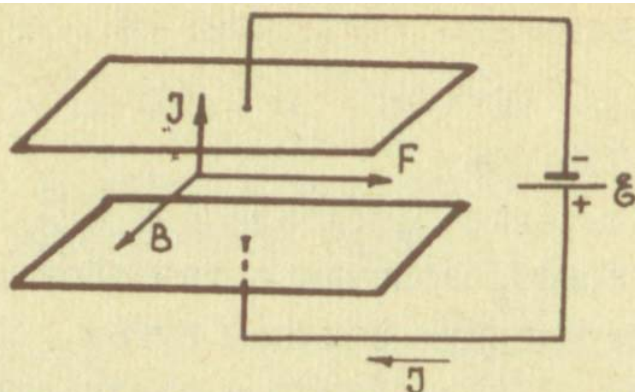


Рис. П.3. Принципиальная схема МГД-ускорителя с внешним магнитным полем

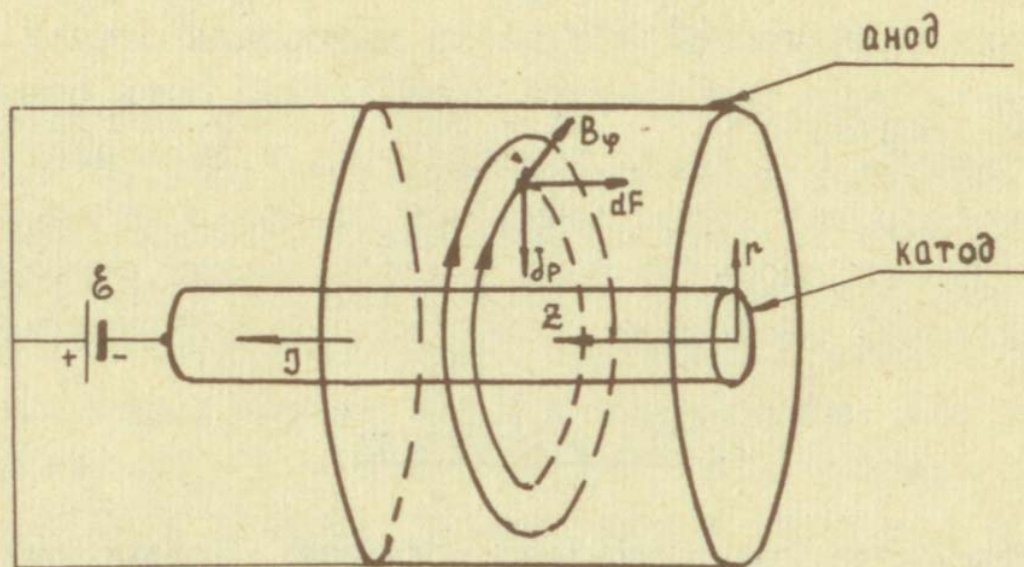


Рис. П.4. Принципиальная схема ускорения в собственном магнитном поле

Перспективность МГД-ускорителей вытекает из следующих особенностей этих систем. В МГД-ускорителе происходит непосредственное преобразование электрической энергии в механическую. Как следует из (П. 16), с помощью МГД-ускорителя в принципе могут быть

достигнуты значительные скорости потоков ионизованного газа –  $10^4 - 10^6$  м/с, причём такие большие скорости достигаются за счёт малых расходов рабочего газа. Кроме того, в МГД-ускорителях может быть использовано собственное магнитное поле электрического тока, протекающего через ускоритель. На рис. П. 4 изображена принципиальная схема МГД-ускорителя без внешнего магнитного поля. Из рисунка ясно, что на каждый элемент объёма  $dV$  ионизованного газа, который, например, образуется при зажигании газового разряда, действует сила Ампера, равная

$$dF = j_p \cdot B \cdot dV \quad (\text{П. 18})$$

Предположим, что плотность электрического тока имеет лишь одну составляющую, направленную вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , т.е.  $j_r = j_p$ ,  $j_z = j_\phi = 0$ . Кроме того, пусть величина  $j_p$  не зависит от  $z$ . Тогда, очевидно,  $j_p = \frac{J}{2\pi rL}$ . Магнитное поле в данном случае создаётся электрическим током, протекающим по катоду (рис. П. 4). Азимутальная составляющая напряжённости магнитного поля в рассматриваемом случае равна

$$H_\phi = \frac{Jz}{2\pi rL}. \quad (\text{П. 19})$$

Таким образом, на каждый элемент объёма (в цилиндрической системе координат  $dV = 2\pi r dr dz$ ) действует сила Ампера

$$dF = \mu_0 \frac{zJ^2}{2\pi L^2 r} dr dz. \quad (\text{П. 20})$$

Интегрируя (П. 20) по всему объёму ускорителя  $r_k \leq r \leq r_a$ ,  $0 \leq z \leq L$ , найдём силу Ампера, действующую на весь объём, находящийся между электродами ускорителя:

$$F = \frac{\mu_0 J^2}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_k}. \quad (\text{П. 21})$$

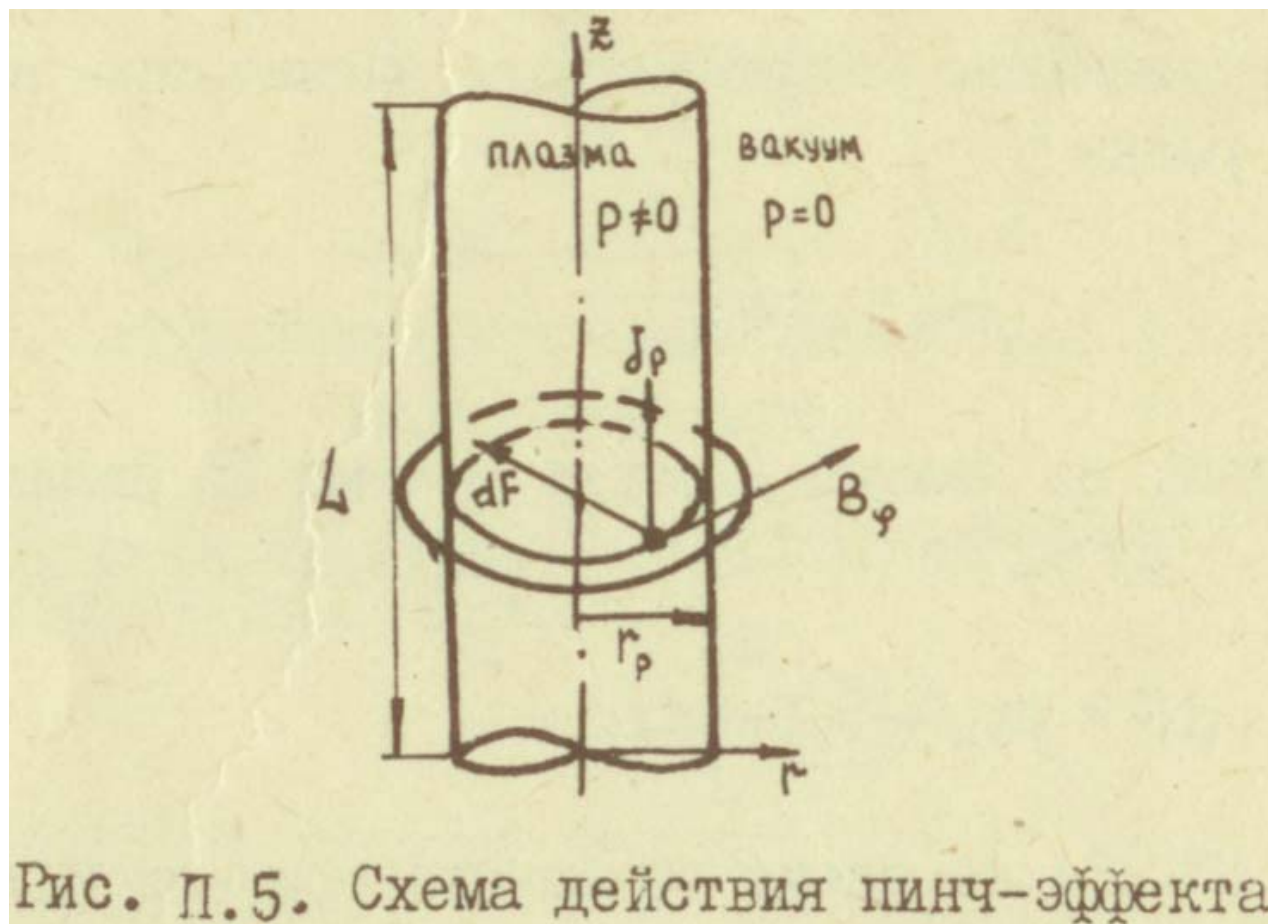
Пусть, например,  $r_a, r_k = 3$ ,  $J = 10^4$  А и  $G = 10^{-4}$  кг/с, тогда сила тяги такого устройства составит  $F_R = 1$  Н, скорость потока  $v = 10$  км/с, затрачиваемая полезная мощность –  $W_K = 0,1$  МВт.

В настоящее время предложен целый ряд конструктивных схем плазменных ускорителей, действие которых основано на других принципах прямого преобразования электрической энергии в механическую. Общее представление об этих способах ускорения плазмы можно получить из работы [9].

#### 4. Проблема термоядерного реактора

Потребность в энергии в настоящее время растёт настолько быстро, что ресурсы всех существующих видов неядерного горючего окажутся явно недостаточными уже в ближайшее

время. Делящиеся материалы могли бы полностью удовлетворить энергетические потребности на протяжении сотен тысяч лет. Однако широкое использование этих материалов связано с большими трудностями по защите окружающей среды от возможного загрязнения. Принципиально более перспективными являются управляемые термоядерные реакции. Но овладение этими процессами требует предварительного решения многих сложных научных и технических проблем. К таким проблемам, например, относится получение очень высоких «звёздных» температур порядка  $10^8 - 10^9$  К и удержание этой высокотемпературной плазмы вдали от стенок термоядерного реактора в течение характерного времени протекания ядерной реакции. Разработано несколько путей решения этих проблем.



Одно из направлений связано с использованием пинч-эффекта – эффекта сжатия канала мощного газового разряда под действием магнитного поля тока разряда.

На рис. П. 5 изображён участок цилиндрического канала газового разряда, подверженный воздействию пинч-эффекта. На каждый элемент объёма плазмы действует сила Ампера, направленная по радиусу к оси канала и производящая сжатие канала в тонкий шнур радиуса  $r_p$ . Так как плазма в рассматриваемых условиях мощного разряда практически полностью ионизована, все частицы оказываются внутри этого шнура. Давление вне шнура равно нулю, а внутри определяется температурой и концентрацией газа и равно согласно уравнению состояния идеальной плазмы  $p = 2 nkT$  (предполагается, что температуры электронов и ионов равны). Обычно длительность подобного рода мощных разрядов мала,

причём плазма обладает хорошей проводимостью. В таком случае, как известно из электродинамики, электрический ток не проникает внутрь проводника и течёт только в пределах тонкого пограничного слоя, то есть имеет место так называемый скин-эффект. Существует равновесное состояние плазменного шнура, когда электродинамические силы, приложенные к граничному слою шнура, уравниваются давлением плазмы. Условие равновесия может быть записано в виде

$$p = \frac{F}{2\pi_p L}, \quad (\text{П. 22})$$

где  $F = JB_\phi L$ . Магнитная индукция прямолинейного проводника с током

$$B_\phi = \mu_0 \frac{J}{2\pi_p}.$$

Подставляя выражения для  $p$ ,  $F$  и  $B_\phi$  в (П. 22), найдём соотношение между силой тока и температурой плазмы для равновесного состояния шнура:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} J^2 = NkT, \quad (\text{П. 23})$$

где  $N = npr_p^2$  – полное число частиц на единицу длины плазменного шнура. Этот параметр может быть определён из начального состояния газа. Действительно,  $N = npr_p^2 = npr_0^2$ , где  $r_0$  – радиус цилиндрической камеры;  $n_0$  – начальная концентрация газа.

Рассмотрим численный пример. Пусть  $p_0 = 10 \text{ Н/м}^2$ ,  $T_0 = 300 \text{ К}$ ,  $r_0 = 0,1 \text{ м}$ ,  $N = 1,2 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-1}$ . Тогда, например, при  $J = 2 \cdot 10^6 \text{ А}$  на основании (П. 23) температура плазмы составляет около  $1,2 \cdot 10^7 \text{ К}$ .

Рассмотренный принцип используется как для удержания, так и нагрева плазмы. Одной из перспективных систем для создания термоядерного реактора является система с тороидальным пинчем, предложенная и разработанная советскими учёными и получившая название «Токамак».

Принцип действия «Токамака» ясен из рис. П. 6. Плазма, заполняющая тор, является одновитковой вторичной обмоткой импульсного трансформатора: импульс тока в первичной обмотке наводит вихревое электрическое поле внутри тора, которое в свою очередь создаёт круговой ток  $J$  в плазме.

Протекание этого тока вызывает пинч-эффект, в результате которого плазма подогревается и отрывается от стенок камеры реактора. Важной особенностью системы «Токамак» является то, что в ней удалось существенно подавить неустойчивость плазменного шнура. Для этого применяется очень сильное (порядка нескольких десятков килोगаусс)

продольное магнитное поле, создаваемое тороидальной катушкой (рис. П. 6). Если температура плазмы не зависит от координат, условие равновесия шнура определяется уравнением (П. 23).



## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

*(только для сканированного издания)*

Больцмана распределение	13, 37
Дебая радиус	9
Лармора радиус	47, 48
Лоренца сила	46
Лэнгмюра частота	11
Ома закон	39
Саха уравнение	37
Сюзерленда формула	31
Фика закон	45
Холла параметр	47, 48
Холла ток	49
Холловская электропроводность	49
Частота циклотронная	48
Эйнштейна соотношение	45, 46

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А. Что каждый физик должен знать о плазме. – М.: Атомиздат, 1965.
2. Арцимович Л.А. Элементарная физика плазмы. – М.: Госатомиздат, 1963.
3. Гришин С.Д., Козлов Н.П. Применение плазменных ускорителей в технике. – В кн.: Плазменные ускорители. – М.: Машиностроение, 1973.
4. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966.
5. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. – М.: Мир, 1976.
6. Франк-Каменецкий Д.А. Плазма – четвёртое состояние вещества. – М.: Госатомиздат, 1963.
7. Чанг Ш. Преобразование энергии. – М.: Атомиздат, 1965.
8. Энгель А. Ионизованные газы. – М.: Физматгиз, 1959.
9. Плазменные ускорители. / Под ред. акад. Л.А. Арцимовича и др. – М.: Машиностроение, 1973.

### *Дополнительно*

10. Гришин С.Д., Лесков Л.В. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1989 – 216 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Обозначения и сокращения	4
Глава 1. Физические параметры ионизованных газов. Понятие плазменного состояния	5
§ 1.1. Основные термодинамические свойства и параметры ионизованных газов	5
§ 1.2. Пространственный и временной масштабы в плазме. Радиус Дебая. Частота плазменных колебаний	9
§ 1.3. Дебаевское экранирование заряженной частицы в идеальной плазме	13
Глава 2. Статистические свойства термодинамически равновесного ионизованного газа	16
§ 2.1. Статистический метод определения параметров ионизованного газа	16
§ 2.2. Характерные скорости частиц в ионизованном газе (при максвелловском распределении)	19
§ 2.3. Средняя энергия частиц и давление ионизованного газа	23
Глава 3. Столкновения и скорости процессов	27
§ 3.1. Эффективное сечение, средняя частота столкновений и средняя длина свободного пробега	27
§ 3.2. Скорости неупругих столкновений в ионизованном газе	32
§ 3.3. Скорости процессов ударной ионизации и тройной рекомбинации. Ионизационное равновесие	33
§ 3.4. Расчёт состава термодинамически равновесного ионизованного газа	37
Глава 4. Ионизованный газ в электрическом и магнитном полях	39
§ 4.1. Электрический ток проводимости. Электропроводность	39
§ 4.2. Диффузный электрический ток. Соотношение Эйнштейна	45
§ 4.3. Электрический ток в скрещенных электрическом и магнитном полях	46
Приложение	51
Алфавитный указатель	61
Литература	62



ФИЗИКА ИОНИЗОВАННЫХ ГАЗОВ

Евгений Павлович Ваулин

Редактор М.С. Винниченко

Технический редактор Н.Б. Карякина

Подписано к печати 29.01.80

Формат 60х90 1/16. Бум. типогр. № 2

Печ. л. 1,0; уч.-изд. л. 3,0. Тираж 1000

Зак. 162/8966. Цена 15 коп.

Ротапринт МАИ

125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

## ПРИМЕЧАНИЕ К СКАНИРОВАННОМУ ИЗДАНИЮ

Поскольку в оригинале настоящий конспект лекций был напечатан другим шрифтом на бумаге другого формата, распределение текста, формул, рисунков и сносок не совпадает с первоначальным. В тех случаях, когда это необходимо, внесены соответствующие поправки.

Также были сделаны комментарии, поясняющие некоторые моменты. Они помечены текстом (*вот так - прим. авт. скана*).

Изменена нумерация формул в главе 3, начиная с формулы (3.19). Подробнее см. на странице 33.

Список литературы отсортирован по алфавиту.

Различия в написании некоторых символов в формулах и в тексте объясняются нежеланием автора лишний раз пользоваться редактором формул.

О замеченных ошибках, опечатках, а также о пожеланиях вы можете сообщить автору сканированного издания, посетив его домашнюю страницу <http://peguser.narod.ru> и оставив сообщение в гостевой книге или отправив письмо по указанному адресу электронной почты (убрав лишние символы).